

Korovkin-Sätze für Funktionenräume

von
Gottlieb Leha
aus
Bondorf

1976 № 3 53

Korovkin - Sätze für Funktionenräume

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Gottlieb Leha

aus

Bondorf



Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen Fach-
bereichen der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Juli 1976

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. H. Remmert

Erstberichterstatter:

Professor Dr. H. Bauer

Zweitberichterstatter:

Professor Dr. D. Kölzow



Inhalt

	Seite
Einleitung	i - iv
Allgemeine Bezeichnungen	1
I. Simpliziale Funktionenräume	3
I.A. Funktionenräume auf X	3
I.B. Simpliziale Funktionenräume	11
I.C. Der relative Choquet-Rand	23
II. Korovkin-Sätze für Funktionenräume	26
II.A. Der relative Korovkin-Abschluß	26
II.B. Charakterisierung des relativen Korovkin-Abschlusses für sim- pliziale Funktionenräume	35
Anhang: Konstruktion von Operatoren im nicht-metrisierbaren Fall	42
Literaturverzeichnis	48



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543128_0005

Einleitung:

Korovkin-Sätze behandeln stets folgende Aufgabenstellung:

Gegeben seien zwei lineare Räume E und F , F mit einer Topologie versehen, eine Abbildung $P : E \longrightarrow F$, sowie ein linearer Teilraum H von E . Für eine bestimmte Klasse $\mathcal{T}$ von Operatoren von E in F gebe man diejenigen $x \in E$ an, für die für jedes Netz

$(T_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}$ gilt:

$$\lim_{i \in I} T_i y = Py \quad \forall y \in H \implies \lim_{i \in I} T_i x = Px .$$

Einer der wichtigsten Spezialfälle ist der, wo F ein geordneter linearer Raum, E ein Teilraum von F , P die kanonische Injektion und $\mathcal{T}$ die Klasse der positiven Operatoren von E in F ist.

Dieses Problem wurde seit dem Erscheinen der grundlegenden Arbeit des russischen Mathematikers Korovkin im Jahre 1953 von vielen Autoren untersucht (wir verweisen dazu auf die Arbeiten und die Literaturangaben darin von BAUER [3], [4] und DONNER [1], [2]).

Während in den bisherigen Veröffentlichungen über Korovkin-Sätze fast durchwegs F als ein Vektorverband vorausgesetzt wurde, ist es das Ziel der vorliegenden Arbeit, die Verbandseigenschaft von F fallenzulassen *. Genauer legen wir folgende Situation zugrunde: X ist ein lokal-kompakter metrisierbarer Raum, $\mathcal{H}$ und $\mathcal{L}$ Räume von

* In ŠAŠKIN [1] wurde auch keine Verbandseigenschaft von F gefordert. Siehe dazu jedoch Bemerkung II.12.1. Außerdem wurde dort nur der endlich-dimensionale Fall untersucht.

reellen stetigen Funktionen auf X . In der obigen allgemeinen Situation werde nun speziell $E = F = \mathcal{L}$, $H = \mathcal{K}$, $P : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ die identische Abbildung sowie $\mathcal{T}$ die Klasse der positiven linearen Operatoren von $\mathcal{L}$ in sich gewählt.

In Kapitel I werden Funktionenräume auf X (Definition Seite 3) allgemein untersucht. Da die bei der Behandlung des Korovkin-Problems verwendeten Methoden aus der Konvexitätstheorie stammen, entwickeln wir - soweit es für unsere Zwecke notwendig erscheint - zunächst eine Dualitätstheorie für Funktionenräume. Um einen überschaubaren Dualraum für einen Funktionenraum zu erhalten, behandeln wir adaptierte Funktionenräume. Eine wichtige Rolle hierbei spielt der Kegel L_+^Δ der positiven linearen Funktionale auf einem Funktionenraum $\mathcal{L}$. L_+^Δ ist schwach vollständig, also können wir die bereits weitgehend entwickelte Theorie der schwach vollständigen Kegel heranziehen. Das Kapitel I lehnt sich eng an diese Theorie an mit dem Unterschied, daß wir für Fragen der Integraldarstellung keine konischen Maße, sondern stets Maße auf dem zugrundeliegenden Raum X verwenden.

Im Teil I.B. befassen wir uns insbesondere mit simplizialen Funktionenräumen. Diese wurden bereits in SIBONY und BLIEDTNER - HANSEN studiert. Im Gegensatz dazu aber legen wir wieder das Schwergewicht auf die Dualität und geben deshalb eine - auch natürlich erscheinende - Definition (I.3.) von "simplizial", indem wir eine Verbandseigenschaft des Dualraumes verlangen. Wir zeigen sodann, daß unsere Definition mit der in SIBONY und BLIEDTNER - HANSEN

übereinstimmt. Schließlich beweisen wir für gewisse simpliziale Funktionenräume (Bedingung I.14.) einen für den Teil II wichtigen Einbettungssatz (Theorem I.17.), der für die Konstruktion von positiven linearen Operatoren eine fundamentale Rolle spielt. Grundlegendes Hilfsmittel ist dabei der Satzsatz von LAZAR (weswegen wir auch die Metrisierbarkeit von X benötigen). Wir bemerken, daß das Theorem I.17. für alle in $\mathcal{C}(X)$ abgeschlossenen simplizialen Funktionenräume auf metrisierbarem kompakten X gilt.

Im Teil I.C. stellen wir den für die spätere Formulierung der Korovkin-Sätze wichtigen Begriff des relativen Choquet-Randes bereit. Dieser Begriff wurde von FRANCHETTI für einen kompakten Grundraum in einer formal andersartigen Darstellung eingeführt. Im Teil II werden dann Korovkin-Sätze formuliert und bewiesen. Teil II.A. bringt dabei mit Theorem II.6 und den nachfolgenden Korollaren II.7 bis II.10 hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Funktion $f \in \mathcal{L}$ zum Korovkin-Abschluß von $\mathcal{K}$ bezüglich $\mathcal{L}$ (Definition II.1.) gehört. Die Sätze sind für die Ordnungstopologie oder für die Topologie der Kompakten Konvergenz formuliert. Dabei ist $\mathcal{L}$ ein beliebiger (also nicht notwendig simplizialer) Funktionenraum auf X .

In Teil II.B. wird durch das Theorem II.14. und die nachfolgenden Korollare II.15 bis II.17 das Korovkin-Problem für simpliziale Funktionenräume $\mathcal{K}$ auf metrisierbarem X , die der Bedingung I.14 genügen, vollständig gelöst. Die Topologie ist hierbei die der kompakten Konvergenz. Da für kompaktes X die Bedingung I.14. auto-

matisch erfüllt ist, bleibt in diesem Fall neben der Simplicialität des Raumes $\mathcal{L}$ die Metrisierbarkeit von X als einzige Bedingung zurück.

Für lokalkompaktes metrisierbares X stellen unsere Ergebnisse eine Verallgemeinerung der Korovkin-Sätze in BAUER [3] dar.

Die Hauptschwierigkeit bei der Charakterisierung des relativen Korovkin-Abschlusses von $\mathcal{K}$ bezüglich $\mathcal{L}$ lag in der Konstruktion von positiven linearen Operatoren von $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}$. Diese Schwierigkeit konnte nur unter Benutzung der Metrisierbarkeit an entscheidender Stelle (Lemma I.16) überwunden werden. Daher geben wir in einem Anhang noch eine (bis zu einem gewissen Grade ähnliche wie die vorhergehende) Konstruktionsmethode - die auch im nichtmetrisierbaren Fall anwendbar ist - für positive lineare Operatoren auf $\mathcal{L}$ an. Der Bildbereich dieser Operatoren ist jedoch nicht mehr $\mathcal{L}$, sondern der Raum der "Differenzen beschränkter nach oben halbstetiger $\mathcal{L}$ -affiner Funktionen" auf X . Wir beschränken uns dabei auf den kompakten Fall und können noch einen Satz vom Korovkin-schen Typ (abschließender Satz im Anhang) herleiten.

Den Herren Dr. G. Ritter, Dr. C. Portenier und H. Schirmeier sowie Frau Dr. U. Schirmeier danke ich für anregende Gespräche und Hinweise. Dies gilt ganz besonders für meinen verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. H. Bauer, auch für die Themenstellung und die geduldige Förderung als Doktorand und nicht zuletzt dafür, daß er mir in einer schwierigen persönlichen Situation viel Verständnis entgegengebracht hat.

O. Allgemeine Bezeichnungen

Ist X eine Menge, so ist

$\mathbb{R}^X$ der Raum der reellen Funktionen auf X ,

$\mathcal{L}_+ = \{l \in \mathcal{L} : l \geq 0\}$ für $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^X$,

$\mathcal{L}^b = \{f \in \mathbb{R}^X : \exists l \in \mathcal{L}, |f| \leq l\}$ für $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^X$ (die Menge der $\mathcal{L}$ -beschränkten reellen Funktionen auf X),

$f|_S = \text{Rest}_S f$ für $f \in \mathbb{R}^X$, $S \subset X$,

$\mathcal{L}|_S = \{l|_S : l \in \mathcal{L}\}$ für $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^X$, $S \subset X$,

$\|f\|_X = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Ist X speziell ein topologischer Raum, so ist

$\mathcal{C}(X) = \{f \in \mathbb{R}^X : f \text{ stetig}\}$ (der Raum der stetigen reellen Funktionen auf X)

$\mathcal{K}(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) : f \text{ hat kompakten Träger}\}$

$\bar{U}$ bzw. $\overset{\circ}{U}$ der Abschluß bzw. das Innere von U für $U \subset X$.

Ist X lokal-kompakt (was stets "Hausdorffsch" impliziert), so ist

$\mathcal{M}(X)$ der Raum der Radon-Maße auf X

$\mathcal{M}_+(X)$ der Kegel der positiven Radon-Maße auf X

$\mathcal{L}^1(\mu)$ der Raum der μ -integrierbaren Funktionen auf X , falls $\mu \in \mathcal{M}(X)$.

Für $f, g \in \mathbb{R}^X$ bedeutet $f \in o(g) : \forall \varepsilon > 0 \exists \text{ kompaktes } K \subset X$

mit $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \quad \forall x \in X \setminus K$

$o(\mathcal{L}) := \{f \in \mathbb{R}^X : \exists g \in \mathcal{L}, f \in o(g)\}$ für $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^X$.

Ist $\mathcal{L}$ Teilraum von $\mathbb{R}^X$, so ist $\mathcal{L}^*$ der Raum der reellen linearen
Funktionale auf $\mathcal{L}$.

Eine Teilmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^X$ heißt linear punktgetrennend, falls gilt:

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \forall \lambda > 0 \exists \ell \in \mathcal{L} \text{ mit } \ell(x) \neq \lambda \ell(y).$$

Ist K eine konvexe Menge, so ist $\text{ex}K$ die Menge der Extrempunkte
von K . Für K konvex und kompakt ist $A(K)$ der Raum der reellen
stetigen affinen Funktionen auf K .

Kapitel I.: Simpliziale Funktionenräume

I.A. Funktionenräume auf X

Es sei X stets ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis. Wir stellen zunächst Definitionen und Eigenschaften von Funktionenräumen auf X zusammen, die im folgenden verwendet werden. Referenzen hierzu sind BAUER [3], [4], BLIEDTNER - HANSEN, CHOQUET [1], [2], GOULLET DE RUGY [1], [2] und SIBONY. Ein linearer Teilraum $\mathcal{L}$ von $\mathcal{C}(X)$ heißt adaptiert, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_+$
- (ii) $\forall x \in X \exists l \in \mathcal{L}_+ \text{ mit } l(x) > 0$
- (iii) $\mathcal{L}^+ \subset \mathcal{O}(\mathcal{L}^+)$

Ein adaptierter Raum $\mathcal{L}$ besitzt folgende wichtige Eigenschaft:

Zu jeder positiven Linearform $\bar{\mu}$ auf $\mathcal{L}$ gibt es ein positives Radon-Maß μ auf X mit $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\bar{\mu}(l) = \int l d\mu \quad \forall l \in \mathcal{L}$.

Ein adaptierter Raum, der linear punktgetrennend ist, heiße Funktionenraum auf X.

I.1. Beispiele:

1. Für kompaktes X ist jeder lineare Teilraum von $\mathcal{C}(X)$, der punktgetrennend ist und die Konstanten enthält, ein Funktionenraum auf X .

2. $\mathcal{K}(X)$ ist Funktionenraum auf X .
3. Für $X = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist der Raum aller Polynome ein Funktionenraum auf X .
4. Für $X = \mathbb{R}^n$ sind die in der Theorie der Distributionen auftretenden Räume $\mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathcal{S}$ (siehe z.B. SCHAEFER [1], S. 107) Funktionenräume auf X .
5. Ist U eine offene relativ-kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $X = \bar{U}$ und $\mathcal{L} = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f \text{ harmonisch in } U\}$, so ist $\mathcal{L}$ ein Funktionenraum auf X .
6. $\mathcal{C}(X)$ ist Funktionenraum auf X . Es gilt nämlich für lokal-kompaktes X :

$\mathcal{C}(X)$ adaptiert $\iff X$ abzählbar im Unendlichen.

Beweis: Sei $\mathcal{C}(X)$ adaptiert. Dann existiert ein $g \in \mathcal{C}_+(X)$

mit $1 \in o(g)$. Dann aber ist $K_n := \{x \in X \mid g(x) \leq n\}$

kompakt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Sei umgekehrt X abzählbar im Unendlichen. Dann existiert

eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$,

$\bar{K}_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $f \in \mathcal{C}_+(X)$. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n := n \cdot \sup_{x \in K_n} f(x)$$

Wir definieren nun die Funktionen $h_1, h_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$h_1(x) := a_{n+1}, \text{ falls } x \in K_n \setminus K_{n-1}$$

$$h_2(x) := a_n, \text{ falls } x \in \overset{\circ}{K}_n \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1}.$$

Dann ist h_1 nach unten, h_2 nach oben halbstetig mit $h_2 \leq h_1$.

Da X abzählbar im Unendlichen und damit normal ist, existiert eine stetige Funktion g mit $h_2 \leq g \leq h_1$.

Damit ist $g(x) \geq n \cdot f(x) \quad \forall x \in K_n \setminus K_{n-1}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$ und $x \in X \setminus K_n$ sei $m \in \mathbb{N}$

mit $x \in K_m \setminus K_{m-1}$. Dann ist $m > n$, also

$$f(x) \leq \frac{1}{m} g(x) \leq \frac{1}{n} g(x) < \varepsilon g(x).$$

Somit ist für $\mathcal{L} = \mathcal{C}(X)$ die Bedingung (iii) erfüllt. (i) und (ii) sind trivialerweise richtig.

7. Ist $\mathcal{L}$ Funktionenraum auf X , A abgeschlossen in X , dann ist

$$\mathcal{L}|_A \text{ Funktionenraum auf } A.$$

Für einen Funktionenraum $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}(X)$ ist der Raum

$\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}^b \cap \mathcal{C}(X)$ selbst wieder ein Funktionenraum auf X , der $\mathcal{K}(X)$ enthält (siehe z.B. BAUER [3]).

Wir setzen nun

$$L_+^\Delta := \mathcal{L}_+^*, \quad L^\Delta := L_+^\Delta - L_+^\Delta$$

$$M_+ := \mathcal{L}_0^*, \quad M := M_+ - M_+.$$

Da $\mathcal{L}_0$ adaptiert ist, existiert zu jedem $\bar{\mu} \in M$ ein Radonmaß μ auf X mit $\bar{\mu}(f) = \int f d\mu \quad \forall f \in \mathcal{L}_0$. Wegen $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{L}_0$ ist dieses Maß eindeutig bestimmt. Also existiert eine lineare Injektion $j : M \rightarrow \mathcal{M}(X)$, die jedem $\bar{\mu} \in M$ das eben beschriebene $\mu \in \mathcal{M}(X)$ zuordnet.

Wegen $j(M_+) \subset \mathcal{M}_+(X)$ ist j auch ordnungstreu und es ist

$$\begin{aligned} j(M) &= \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}^1(\mu)\} = \\ &= \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \mathcal{L} \subset \mathcal{L}^1(\mu)\}. \end{aligned}$$

Wir identifizieren von nun an M mit $j(M)$, betrachten also M als Teilmenge von $\mathcal{M}(X)$.

Da $\mathcal{L}$ adaptiert ist, gibt es zu jedem $\alpha \in L_+^\Delta$ ein $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ mit $\mathcal{L} \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\alpha(l) = \int l d\mu \quad \forall l \in \mathcal{L}$.

Somit existiert eine lineare Surjektion $r : M \rightarrow L^\Delta$ mit $r(M_+) = L_+^\Delta$. (r ist surjektiv, da $\mathcal{L}$ kofinal in $\mathcal{L}_0$ ist, also jede positive Linearform auf $\mathcal{L}$ eine positive Fortsetzung auf $\mathcal{L}_0$ besitzt).

Wir haben damit zwei Paare $(\mathcal{L}, L^\Delta)$ und $(\mathcal{L}_0, M)$ von reellen Vektorräumen, die zueinander in Dualität stehen; ferner eine Injektion von $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}_0$ und eine Projektion von M auf L^Δ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & & L^\Delta \\ \downarrow & & \uparrow r \\ \mathcal{L}_0 & & M \end{array}$$

Die Räume L^Δ bzw. M seien stets mit der Topologie $\sigma(L^\Delta, \mathcal{L})$ bzw. $\sigma(M, \mathcal{L}_0)$ versehen. Dann sind L_+^Δ und M_+ vollständig, also schwach vollständige Kegel.

Der Raum X kann homöomorph in M_+ und falls $\mathcal{L}$ eine strikt positive Funktion enthält, auch in L_+^Δ eingebettet werden; die zugehörigen Homöomorphismen sind die "Punktauswertungen" δ bzw. ε :

$$\varepsilon : \begin{cases} X \longrightarrow M_+ \\ x \longrightarrow \varepsilon_x \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \delta : \begin{cases} X \longrightarrow L_+^\Delta \\ x \longrightarrow \delta_x \end{cases}$$

wobei $\varepsilon_x(f) := f(x)$ für alle $f \in \mathcal{L}_0$

bzw. $\delta_x(l) := l(x)$ für alle $l \in \mathcal{L}$ ist.

Zunächst sind δ und ε offenbar stetig und injektiv. Daß X durch ε homöomorph in M_+ eingebettet wird, ist wegen

$\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{L}_0$ sofort zu sehen.

Für $\delta : X \rightarrow L_+^{\Delta}$ folgt die Behauptung aus folgender Überlegung:

Die Offenheit von δ ist äquivalent damit, daß die von $\mathcal{L}$ auf X erzeugte Topologie $\tau_{\mathcal{L}}$ gleich der Ausgangstopologie von

X ist. Wegen $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_+$ wird $\tau_{\mathcal{L}}$ von $\mathcal{L}_+$ erzeugt. In der Tat:

Wir betrachten die Menge Q aller Quotienten $\frac{f}{g}$ mit $f, g \in \mathcal{L}_+$, $f \in o(g)$, $g > 0$. Dann gilt:

- (i) Für alle $f \in \mathcal{L}_+$ existiert ein $g \in \mathcal{L}_+$ mit $\frac{f}{g} \in Q$.
- (ii) Jedes $p \in Q$ verschwindet im Unendlichen, besitzt also eine stetige Fortsetzung $\bar{p}$ auf die Alexandroff-Kompaktifizierung X_a von X .
- (iii) Die Menge aller derartigen $\bar{p}$ mit $p \in Q$ trennt die Punkte von X_a . Dies läßt sich folgendermaßen einsehen:
Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Mit $\mathcal{L}$ ist auch $\mathcal{L}_+$ linear punktstetig, also existiert ein $l \in \mathcal{L}_+$ mit $l(x) = 0$, $l(y) > 0$. Dann werden x und y aber durch $\frac{l}{g}$ getrennt, wobei $g \in \mathcal{L}_+$, $l \in o(g)$, $g > 0$ gewählt werde. Ferner existiert zu jedem $x \in X$ ein $p \in Q$ mit $p(x) > 0$.

Damit erzeugt $\{\bar{p} | p \in Q\}$ die Topologie von X_a , also Q die Topologie von X . Die Topologie $\tau_{\mathcal{L}}$ ist aber gleich der von Q erzeugten Topologie. Sie ist nämlich feiner, da jedes $p \in Q$

stetig ist bezüglich $\tau_{\mathcal{L}}$. Sie ist auch gröber, da sie gröber ist als die Ausgangstopologie von X , die ja mit der von Q erzeugten übereinstimmt.

Wir setzen nun für $\alpha \in L_+^{\Delta}$:

$$\mathcal{M}_{\alpha}(\mathcal{L}) := \{\mu \in M_+ \mid r(\mu) = \alpha\}$$

und schreiben kurz $\mathcal{M}_x(\mathcal{L})$ für $\mathcal{M}_{\delta_x}(\mathcal{L})$.

Die Menge $\partial_{\mathcal{L}} X = \{x \in X \mid \mathcal{M}_x(\mathcal{L}) = \{\varepsilon_x\}\}$ ist der Choquet-Rand von $\mathcal{L}$.

Setzt man für $f \in \mathcal{L}_0$, $x \in X$:

$$\hat{f}(x) := \inf \{l(x) \mid l \in \mathcal{L}, l \geq f\}$$

so ist $\partial_{\mathcal{L}} X = \{x \in X \mid \hat{f}(x) = f(x) \quad \forall f \in \mathcal{L}_0\}$

(siehe z.B. BAUER [3], Corollary 2.4.).

Als Folgerung ergibt sich hieraus, daß $\alpha \in L_+^{\Delta}$ genau dann auf einem Extremalstrahl von L_+^{Δ} liegt, wenn ein $x \in \partial_{\mathcal{L}} X$ existiert mit $\alpha = t \cdot \delta_x$, $t > 0$ (siehe z.B. JAMESON, p. 31).

Da X abzählbar im Unendlichen ist, ist $\partial_{\mathcal{L}} X \neq \emptyset$ für jeden Funktionenraum $\mathcal{L}$ auf X und es gilt:

$$l \in \mathcal{L}, l \geq 0 \text{ auf } \partial_{\mathcal{L}} X \implies l \geq 0$$

(siehe z.B. BAUER [3], Remark 2.6.).

Somit ist L_+^{Δ} profiliert, d.h. für jedes Paar f, g nicht-negativer nach oben halbstetiger linearer Funktionale auf L_+^{Δ} mit $f \leq g$ auf $\text{ex } L_+^{\Delta}$ gilt $f \leq g$ überall, wobei $\text{ex } L_+^{\Delta}$ die Menge der Extremalstrahlen von L_+^{Δ} bezeichne (siehe GOULLET DE RUGY [2], Définition 35).

Als Folgerung ergibt sich

$$L_+^{\Delta} = \overline{\text{co}} (\text{ex } L_+^{\Delta})$$

(siehe GOULLET DE RUGY [2], Proposition 36).

Sei nun $S_h := \{\sup(l_1, \dots, l_n) \mid n \in \mathbb{N}, l_1, \dots, l_n \in \mathcal{L}\}$ der von $\mathcal{L}$ erzeugte max-stabile Kegel in $\mathcal{C}(X)$.

Dann ist $h(\mathcal{L}) := S_h - S_h$ der von $\mathcal{L}$ erzeugte Untervektorverband in $\mathcal{C}(X)$. $h(\mathcal{L})$ ist Teilraum von $\mathcal{L}_0$ und es gilt sogar:

$h(\mathcal{L})$ ist dicht in $\mathcal{L}_0$ bezüglich jeder Topologie des dualen Paares $(\mathcal{L}_0, M)$. Ein Beweis hiervon findet sich zum Beispiel in SIBONY, p. 57, Proposition 1 (die Ordnungstopologie auf $\mathcal{L}_0$ ist eine Topologie des dualen Paares $(\mathcal{L}_0, M)$, da $\mathcal{L}_0$ ein Verband ist).

Mit $E := \mathcal{L}_0$, $A := \mathcal{L}_{0+}$, $B := S_h$ sind die Axiome 1, 2, 3 in CHOQUET [2], Teil 2 erfüllt; es gilt nämlich:

1. $A + B = E$

2. a) A enthält keine Gerade, erzeugt E , und der durch A geordnete Raum E ist ein Verband

b) für alle $b_1, b_2 \in B$ ist $\sup(b_1, b_2) \in B$

3. Setzt man $H = B \cap (-B)$, dann ist $A + H = E$.

Folglich sind alle Ergebnisse von dort übertragbar.

I.2. Insbesondere gilt:

(i) Die Relation $< = <_{S_h}$ auf M_+ :

$$\mu, \nu \in M_+, \mu < \nu \iff \mu(f) < \nu(f) \quad \forall f \in S_h \text{ ist eine Ordnungsrelation.}$$

(ii) Jedes $\mu \in M_+$ wird von einem maximalen (bezüglich $<$)

$$\mu_0 \in M_+ \text{ majorisiert.}$$

(iii) Setzt man für $f \in \mathcal{L}_0$, $\mu \in M_+$:

$$\hat{\mu}(f) = \inf \{\mu(-g) \mid g \in S_h, f \leq -g\}, \text{ so ist die Abbildung}$$

$f \mapsto \hat{\mu}(f)$ sublinear auf $\mathcal{L}_0$.

(iv) $\forall \mu, \nu \in M^+ : \mu < \nu \implies \hat{\mu} > \hat{\nu}$

(v) Es ist $\mu \in M_+$ genau dann maximal, wenn gilt:

$\hat{\mu}(g) = \mu(g) \quad \forall g \in S_h$. Dies gilt wiederum genau dann,

wenn $\hat{\mu}(f) = \mu(f)$ ist $\forall f \in \mathcal{L}_0$.

(vi) Die Menge $M_+^{\max}$ der maximalen $\mu \in M_+$ ist ein nach unten erblicher (bezüglich $\leq$) Teilkegel von M_+ , der ein Verbandskegel ist.

Ferner gelten die Beziehungen:

$$\forall \mu, \nu \in M_+ : \quad \mu < \nu \implies r(\mu) = r(\nu)$$

$$\forall \mu, \nu \in M_+, \quad \forall x \in X : \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{L}) \iff \varepsilon_x < \mu.$$

$$\forall \mu \in M_+, \quad \forall f \in \mathcal{L}_0 :$$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(f) &= \int \hat{f} d\mu \quad (\mu \text{ als Ma\ss aufgefaf\ss t!}), \text{ da } \hat{f} \text{ nach oben} \\ &\text{halbstetig und } \mu\text{-integrierbar und } \{-g \in S_h \mid f \leq -g\} \text{ ab-} \\ &\text{steigend filtrierend ist (und damit } \hat{\mu}(f) = \\ &= \mu(\inf\{-g \in S_h \mid f \leq -g\}) = \int \hat{f} d\mu \text{ ist).} \end{aligned}$$

(vii) Also sind f\ur \mu \in M_+ \ddot{a}quivalent:

a) μ maximal

$$b) \mu(g) = \int \hat{g} d\mu \quad \forall g \in S_h$$

$$c) \mu(f) = \int \hat{f} d\mu \quad \forall f \in \mathcal{L}_0.$$

I.B. Simpliziale Funktionenräume

I.3. Definition:

Ein Funktionenraum $\mathcal{L}$ auf X heiße simplizial, falls L_+^Δ ein Verbandskegel ist (d.h. falls L^Δ ein Vektorverband ist).

I.4. Beispiele:

- 1.) Für $\mathcal{L} = \mathcal{C}(X)$ ist $L^\Delta = M = \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \mu \text{ hat kompakten Träger}\}$, also ist $\mathcal{L}$ simplizial.
- 2.) Für jeden Funktionenraum $\mathcal{L}$ auf X ist $\mathcal{L}_0$ ein Verband, also ist M ein Verband und damit $\mathcal{L}_0$ simplizial.
- 3.) Besitzt $\mathcal{L}$ die Rieszsche Zerlegungseigenschaft, dann ist L^Δ der Raum der (ordnungs-) beschränkten linearen Funktionale auf $\mathcal{L}$, also ein Verband und damit $\mathcal{L}$ simplizial.
- 4.) Ist X kompakt, dann ist $\mathcal{L}$ genau dann simplizial, wenn der Zustandsraum von $\mathcal{L}$ ein Choquet-Simplex ist.
- 5.) Seien $\mathcal{L}$ und X wie in Beispiel I.1.5., dann ist $\mathcal{L}$ simplizial.
Eine wesentlich allgemeinere Aussage (für beliebige harmonische Räume) wird bei BLIEDTNER - HANSEN bewiesen. (Der nachfolgende Satz I.6. zeigt, daß der hier eingeführte Begriff "simplizial" mit dem dort verwendeten übereinstimmt.)

Wir wollen nun den Begriff "simplizial" durch einige gleichwertige Eigenschaften kennzeichnen. Das Vorgehen ist dabei analog wie in CHOQUET [2] für den Fall der konischen Maße auf schwach

vollständigen Kegeln.

I.5. Lemma:

Sei $\mathcal{L}$ simplizial und $g = \sup(\ell_1, \dots, \ell_n) \in S_h$ mit $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathcal{L}$.

Dann gilt:

Für jedes $\alpha \in L_+^\Delta$ existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L_+^\Delta$ mit der Eigenschaft:

$$\hat{g}(\alpha) = \sum_{i=1}^n g(\alpha_i), \text{ wobei } \hat{g}(\alpha) := \inf\{\ell(\alpha) \mid \ell \in \mathcal{L}, \ell \geq g\} \text{ ist.}$$

Beweis:

Wegen $S_h \subset \mathcal{L}_0$ gibt es ein $\ell_0 \in \mathcal{L}$ mit $|g| \leq \ell_0$.

Wir setzen nun für $k = 0, \dots, n$:

$$C_k := \{(\alpha, \lambda) \in L_+^\Delta \times \mathbb{R} : \ell_k(\alpha) \geq \lambda\}$$

Dann gilt für jedes $k = 0, \dots, n$:

C_k ist ein abgeschlossener Kegel in $L_+^\Delta \times \mathbb{R}$, also schwach vollständig.

Ferner ist $C_k \subset C_0$ für $k = 1, \dots, n$.

Also ist $\overline{\bigcup_{k=1}^n C_k} = \sum_{k=1}^n C_k$ (siehe z.B. GOULLET DE RUGY [1],

p. 25, Corollaire 3.3.)

Damit ist $\sum_{k=1}^n C_k = \overline{\bigcup_{k=1}^n C_k} = \{(\alpha, \lambda) \in L_+^\Delta \times \mathbb{R} : \hat{g}(\alpha) \geq \lambda\}$.

Also existieren $(\alpha_1, \lambda_1) \in C_1, \dots, (\alpha_n, \lambda_n) \in C_n$ mit

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \hat{g}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq \sum_{i=1}^n \ell_i(\alpha_i) \leq \sum_{i=1}^n g(\alpha_i) \leq \sum_{i=1}^n \hat{g}(\alpha_i) \leq$$

$$\leq \hat{g}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) = \hat{g}(\alpha).$$

Somit ist $\hat{g}(\alpha) = \sum_{i=1}^n g(\alpha_i)$.

I.6. Satz:

Für einen Funktionenraum $\mathcal{L}$ auf X sind äquivalent:

- (1) $\mathcal{L}$ ist simplizial
- (2) Die Abbildung $g \longrightarrow \hat{g}$ ist positiv linear auf S_h
- (3) Zu jedem $\alpha \in L_+^\Delta$ existiert genau ein $\mu \in M_+^{\max}$ mit $r(\mu) = \alpha$.

Beweis:

(1) $\implies$ (2) : Die Abbildung $g \longrightarrow \hat{g}$ ist offenbar positiv

homogen und subadditiv. Also ist nur noch zu zeigen:

$$f, g \in S_h, \alpha \in L_+^\Delta \implies \hat{f}(\alpha) + \hat{g}(\alpha) \leq \widehat{f+g}(\alpha) .$$

Wegen Lemma I.5. existieren zu $f, g \in S_h$ und $\alpha \in L_+^\Delta$

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L_+^\Delta, \beta_1, \dots, \beta_m \in L_+^\Delta \text{ mit } \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i, = \sum_{j=1}^m \beta_j ,$$

$$\hat{f}(\alpha) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) , \hat{g}(\alpha) = \sum_{j=1}^m g(\beta_j) .$$

Da L_+^Δ Verband ist, also die Rieszsche Zerlegungseigenschaft

besitzt, gibt es γ_{ij} ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$) in L_+^Δ ,

$$\text{so da\ss } \alpha_i = \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \text{ und } \beta_j = \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} \text{ ist.}$$

Dann gilt:

$$f(\alpha_i) \leq \sum_j f(\gamma_{ij}), g(\beta_j) \leq \sum_i g(\gamma_{ij})$$

Also:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\alpha) + \hat{g}(\alpha) &= \sum_i f(\alpha_i) + \sum_j g(\beta_j) \leq \\ &\leq \sum_i \sum_j f(\gamma_{ij}) + \sum_j \sum_i g(\gamma_{ij}) = \\ &= \sum_{i,j} (f+g)(\gamma_{ij}) \leq \widehat{f+g}(\alpha) .\end{aligned}$$

(2) $\longrightarrow$ (3) : Sei $\alpha \in L_+^\Delta$.

Setzt man $\bar{\mu} : S_h \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{\mu}(f) = \hat{f}(\alpha)$, so ist $\bar{\mu}$ linear, besitzt also eine lineare Fortsetzung $\bar{\mu}$ auf $h(\mathcal{L}) = S_h - S_h$. Offenbar ist $\bar{\mu}$ positiv auf $h(\mathcal{L})$. Also kann man $\bar{\mu}$ positiv auf $\mathcal{L}_0$, also zu einem Element $\mu \in M_+$ fortsetzen.

Es ist $r(\mu) = \alpha$.

Sei nun $v \in M_+$ mit $r(v) = \alpha$, dann gilt

$$v(f) \leq \hat{f}(\alpha) = \mu(f) \quad \forall f \in S_h, \text{ also } v < \mu .$$

Damit ist μ eindeutig bestimmtes maximales Element von M_+ mit $r(\mu) = \alpha$.

(3) $\longrightarrow$ (1) : Nach I.2. (vi) ist die Menge $M_+^{\max}$ der maximalen

$\mu \in M_+$ ein Verbandskegel

Die Abbildung $\mu \longrightarrow r(\mu)$ von $M_+^{\max}$ auf L_+^Δ ist surjektiv,

linear, ordnungstreu und wegen (3) auch injektiv. Also

ist L_+^Δ Verbandskegel.

I.7. Bemerkung:

Damit ist für einen Funktionenraum auf X der hier eingeführte Begriff "simplicial" gleichwertig zu dem in SIBONY und in BLIEDTNER - HANSEN. (Bei SIBONY werden allerdings adaptierte Funktionenkegel betrachtet, die Halbverbände nach unten sind).

Im folgenden sei stets $\bar{\mathcal{L}}$ der Abschluß von $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}_0$ bezüglich einer Topologie des Paares $(\mathcal{L}_0, M)$.

Wir wollen nun den Raum

$$H(\mathcal{L}) := \{f \in \mathcal{L}_0 \mid f(x) = \mu(f) \quad \forall x \in X, \quad \forall \mu \in \mathcal{M}_X(\mathcal{L})\}$$

der $\mathcal{L}$ -affinen Funktionen auf X kennzeichnen.

Dazu benötigen wir das

I.8. Lemma:

Sei Y eine nichtleere Menge und $\mathcal{H}$ ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^Y$.

Ferner sei $f \in \mathcal{H}^b$ mit $\hat{f} = \underline{f}$, wobei wie früher

$$\hat{f}(x) = \inf\{h(x) \mid h \in \mathcal{H}, h \geq f\} \text{ und}$$

$$\underline{f}(x) = -(\widehat{-f})(x) \text{ sei.}$$

Dann gilt für alle $g \in \mathcal{H}^b$, für alle $x \in Y$:

$$\hat{g}(x) = \inf\{h'(x) \mid h' \in \mathcal{H} + \mathbb{R} \cdot f, h' \geq g\}.$$

Beweis:

(Es ist eine fast wörtliche Übertragung des Beweises von Lemma 4.4. in ALFSEN).

Sei $x \in Y$, $g \in \mathcal{H}^b$;

$$\hat{g}(x) := \inf\{h'(x) \mid h' \in \mathcal{H} + \mathbb{R} \cdot f, h' \geq g\}.$$

Offenbar ist $\hat{g}(x) \leq \hat{g}(x)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $h_0 \in \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $g \leq h_0 + \lambda \cdot f$,

$$h_0(x) + \lambda f(x) < \hat{g}(x) + \varepsilon.$$

$$\lambda > 0: \text{ Wähle } h_1 \in \mathcal{H} \text{ mit } f \leq h_1, h_1(x) \leq \hat{f}(x) + \frac{\varepsilon}{2\lambda} = f(x) + \frac{\varepsilon}{2\lambda}$$

$$\lambda < 0: \text{ Wähle } h_1 \in \mathcal{H} \text{ mit } h_1 \leq f, h_1(x) > \hat{f}(x) + \frac{\varepsilon}{2\lambda} = f(x) + \frac{\varepsilon}{2\lambda}$$

$\lambda = 0$: Wähle $h_1 \in \mathcal{H}$ beliebig.

$$\text{Dann gilt: } g \leq h_0 + \lambda h_1, h_0(x) + \lambda h_1(x) < \hat{g}(x) + \varepsilon.$$

I.9. Satz:

Sei $\mathcal{X}$ ein Funktionenraum auf X . Dann sind für $f \in \mathcal{X}_0$ äquivalent:

$$(1) f \in \overline{\mathcal{X}}$$

$$(2) f \in H(\mathcal{X}) \text{ und}$$

$$\mu_1(f) = \mu_2(f) \text{ für alle } \mu_1, \mu_2 \in M_+^{\max} \text{ mit } r(\mu_1) = r(\mu_2).$$

Beweis:

(siehe dazu ALFSEN, Theorem II.4.5.)

$$(1) \implies (2) \text{ ist klar}$$

$$(2) \implies (1) \text{ Allgemein gilt: } f \in H(\mathcal{X}) \iff \hat{f} = f = \hat{f}$$

(BAUER [3], Corollary 2.3.)

Sei nun $f \in \mathcal{X}_0$ mit den Eigenschaften (2).

Ferner sei $\mu \in M$ mit $\mu(\mathbb{1}) = 0 \quad \forall \mathbb{1} \in \mathcal{X}$.

Zu zeigen ist: $\mu(f) = 0$.

Es ist $\mu = \mu_1 - \mu_2$ mit $\mu_1, \mu_2 \in M_+$ und $r(\mu_1) = r(\mu_2)$.

Sei $\tilde{S}_h$ der von $\mathcal{X} + \mathbb{R} \cdot f$ erzeugte max-stabile Kegel in $\mathcal{X}_0$.

Sei $\ll$ die durch $\tilde{S}_h$ definierte Ordnung auf M_+ .

Dann existieren $\ll$ -maximale Elemente $v_1, v_2 \in M_+$ mit $\mu_1 \ll v_1$,

also insbesondere $\mu_i \ll v_i$ für $i = 1, 2$. Also ist $\mu_i = v_i$

auf $\mathcal{L}$ und $\mu_i(f) = v_i(f)$ und $r(v_i) = r(\mu_i)$ für $i = 1, 2$.

Wegen Lemma I.8. ist $\hat{g}(x) = \hat{g}(x) = \inf\{l(x) \mid l \in \mathcal{L} + \mathbb{R} \cdot f, l \geq g\}$

für alle $x \in X$, also ist v_i auch maximal bezüglich $\ll$ (I.2. (VII))

und damit $v_i \in M_+^{\max}$ ($i = 1, 2$).

Also ist $\mu_1(f) = v_1(f) = v_2(f) = \mu_2(f)$, also $\mu(f) = 0$.

I.10. Korollar:

Ist $\mathcal{L}$ simplizial, dann ist $H(\mathcal{L}) = \overline{\mathcal{L}}$.

Beweis:

Folgt unmittelbar aus Satz I.9., da nach Satz I.6. (3) für

simpliziales $\mathcal{L}$ gilt:

$$\mu_1, \mu_2 \in M_+^{\max}, \quad r(\mu_1) = r(\mu_2) \implies \mu_1 = \mu_2.$$

I.11. Korollar:

Für einen Funktionenraum $\mathcal{L}$ auf X sind äquivalent:

(1) $\mathcal{L}$ ist simplizial

(4) $\overline{\mathcal{L}}$ besitzt die Rieszsche Zerlegungseigenschaft.

Beweis:

(1) $\implies$ (4): Dies folgt aus SIBONY, p. 67, Prop. 3.

(4) $\implies$ (1) L^{Δ} ist der Raum der (ordnungs-)beschränkten linearen Funktionalen auf $\overline{\mathcal{L}}$, falls $\overline{\mathcal{L}}$ die Rieszsche Zerlegungseigenschaft besitzt.

I.12. Korollar:

Für jeden simplizialen Funktionenraum $\mathcal{L}$ auf X ist die Ordnungstopologie auf $\mathcal{L}$ eine Topologie des dualen Paares $(\mathcal{L}, L^\Delta)$; sie ist sogar die Mackey-Topologie des Paares $(\mathcal{L}, L^\Delta)$.

Beweis:

Nach dem Korollar I.11. besitzt $\overline{\mathcal{L}}$ die Rieszsche Zerlegungseigenschaft, also folgt die Behauptung aus SIBONY, p. 7, Proposition 5 und p. 8, Théorème 6.

I.13. Bemerkungen:

1. Für $\mathcal{L} = \mathcal{C}(X)$ ist die Ordnungstopologie auf $\mathcal{L}$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X .
2. Ein fundamentales Umgebungssystem der Null für die Ordnungstopologie auf einem Unterverband von $\mathcal{L}^b$ wird in BAUER [4], Teil 1 angegeben. Das dortige Lemma 1.1. bleibt samt Beweis für Funktionenräume, die positiv erzeugt sind und die die Rieszsche Zerlegungseigenschaft besitzen, also insbesondere für abgeschlossene simpliziale Funktionenräume, erhalten.
3. Zur Aussage des Korollars I.10. vgl. auch BAUER [4], Remark 2.5.1.

Wir führen nun die zwei folgenden Bedingungen für Funktionenräume $\mathcal{L}$ auf X ein:

- I.14. (1) $\mathcal{L}$ ist abgeschlossen in $\mathcal{L}_0$ (bezüglich einer Topologie des Paares $(\mathcal{L}_0, M)$)

(2) Es existiert eine Basis B von L_+^Δ mit folgenden Eigenschaften:

$$(i) \delta_x \in B \quad \forall x \in X$$

(ii) Es existiert eine aufsteigende Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von

$$\text{kompakten Seiten von } B \text{ mit } B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Dabei sei B eine Basis von L_+^Δ , falls ein strikt positives

$$\ell \in \mathcal{L}_+ \text{ existiert mit } B = \{\alpha \in L_+^\Delta \mid \ell(\alpha) = 1\}.$$

I.15. Beispiele:

1. Die Bedingungen I.14. sind für jeden in der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossenen Funktionenraum $\mathcal{L}$ auf einem kompakten Raum erfüllt, falls $\mathcal{L}$ die Konstanten enthält.

2. Die Bedingung (2) (i) ist genau dann erfüllt, wenn $\mathcal{L}$ die Konstanten enthält.

Allgemeiner ist die Existenz einer Basis in L_+^Δ äquivalent zur Existenz einer strikt positiven Funktion $\ell_0 \in \mathcal{L}$.

Enthält aber $\mathcal{L}$ eine derartige Funktion ℓ_0 , dann ist

$\frac{1}{\ell_0} \mathcal{L} = \{ \frac{\ell}{\ell_0} : \ell \in \mathcal{L} \}$ ein Funktionenraum auf X , der die Konstanten enthält.

3. Die Bedingungen I.14. (1) und (2) sind für $\mathcal{L} = \mathcal{C}(X)$ erfüllt.

Man wähle nämlich eine aufsteigende Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen K_n von X mit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ für F_n die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf X , die von K_n getragen werden.

4. Verallgemeinerung von Beispiel 3: Ist $1 \in \mathcal{L}$ und $\partial_{\mathcal{L}} X$ abgeschlossen, dann existiert eine Basis B von L_+^Δ und eine aufsteigende Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von kompakten Seiten von B . Man wähle nämlich wie in

Beispiel 3 eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und definiere

$$F_n := \overline{\text{co}}(\delta_x \mid x \in K_n \cap \partial_{\mathcal{L}} X) .$$

Dann ist jedes F_n Seite von B , da nach dem Satz von MILMAN

die Extrempunkte von F_n in der kompakten Menge

$$\{\delta_x \mid x \in K_n \cap \partial_{\mathcal{L}} X\}$$

liegen und damit Extrempunkte von B sind. (F_n ist kompakt, da L_+^Δ vollständig ist).

I.16. Lemma:

Sei $\mathcal{L}$ ein simplicialer Funktionenraum auf X , der der Bedingung

I.14. (2) genügt, für den also eine Basis B von L_+^Δ und eine

Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Seiten von B wie dort angegeben existiert.

Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine stetige affine Abbildung ϕ_n

von F_{n+1} auf F_n mit $\phi_n(\alpha) = \alpha \quad \forall \alpha \in F_n$.

Beweis:

Zunächst zeigen wir: Jedes F_n ist metrisierbar. Zunächst ist

$A_n := \{x \in X \mid \delta_x \in F_n\}$ kompakt und metrisierbar. Also ist auch

$\delta(A_n)$ metrisierbar, da δ eine homöomorphe Einbettung von X in B

ist. Wegen $F_n = \overline{\text{co}}(\delta(A_n))$ ist damit auch F_n metrisierbar; denn:

Ist $A(F_n)$ die Menge der stetigen affinen Funktionen auf F_n ,

dann ist wegen $\text{ex}(F_n) \subset \delta(A_n)$ der Raum $A(F_n)$ isometrisch isomorph

zum Raum der Einschränkungen von $A(F_n)$ auf $\delta(A_n)$. Aus der

Metrisierbarkeit von $\delta(A_n)$ folgt aber die Separabilität dieses

Raumes der Einschränkungen und damit die Separabilität von $A(F_n)$

und daraus wieder die Metrisierbarkeit von F_n .

Weiterhin ist jedes F_n ein Simplex (siehe GOULLET DE RUGY [1], p. 15. Prop. 2.8.) und jedes F_n eine Seite von F_{n+1} . Als Folgerung aus der Anwendung des Satzes von LAZAR auf F_{n+1} ergibt sich:

Es existiert eine stetige affine Abbildung $\phi_n : F_{n+1} \longrightarrow F_n$ mit $\phi_n(\alpha) = \alpha \quad \forall \alpha \in F_n$ (GOULLET DE RUGY [1], p. 78, Corollaire 8.7).

I.17. Theorem:

Sei $\mathcal{L}$ ein simplizialer Funktionenraum auf X , der den Bedingungen I.14. (1) und (2) genügt.

Ferner sei A eine kompakte Teilmenge von X mit $A \subset \delta_{\mathcal{L}} X$.

Dann existiert ein ordnungstreuer Isomorphismus R_A von $\mathcal{L}(A)$ in $\mathcal{L}$ mit den Eigenschaften:

- (i) $p_A \circ R_A f = f \quad \forall f \in \mathcal{L}(A)$, wobei $p_A g = \text{Rest}_A g \quad \forall g \in \mathcal{L}(X)$ ist
- (ii) $\sup_{x \in X} R_A f(x) = \sup_{x \in A} f(x), \quad \inf_{x \in X} R_A f(x) = \inf_{x \in A} f(x) \quad \forall f \in \mathcal{L}(A)$.

Beweis:

Sei $F_0 := \overline{\text{co}}\{\delta_x \mid x \in A\}$. Dann ist F_0 eine Seite von B , und zwar ist $\text{ex} F_0 = \delta(A)$, also ist F_0 ein BAUER-Simplex.

$\mathcal{L}(A)$ ist isometrisch isomorph zu $\mathcal{C}(\delta(A))$ und dies ist wiederum isometrisch isomorph zu $A(F_0)$.

Es sei nun o.B.d.A. $F_0 \subset F_1$.

F_0 ist Seite von F_1 , also existiert wie in Lemma I.16. eine stetige affine Abbildung $\phi_0 : F_1 \longrightarrow F_0$ mit $\phi_0(\alpha) = \alpha \quad \forall \alpha \in F_0$.

Wir setzen nun $\phi_A : B \longrightarrow F_0$ fest durch $\phi_A(\alpha) := \phi_0 \circ \phi_1 \circ \dots \circ \phi_n(\alpha)$, falls $\alpha \in F_{n+1} \setminus F_n$.

Dann ist ϕ_A eine stetige affine Abbildung von B auf F_0 mit

$$\phi_A(\alpha) = \alpha \quad \forall \alpha \in F_0.$$

Wir definieren nun für $f \in A(F_0)$:

$$\tilde{R}_A f(\alpha) := f(\phi_A(\alpha)).$$

Dann ist $\tilde{R}_A f$ stetig affin auf B mit $\tilde{R}_A f(\alpha) = f(\alpha) \quad \forall \alpha \in F_0$.

Ist nun T ein isometrischer Isomorphismus von $\mathcal{L}(A)$ auf $A(F_0)$,

dann leistet R_A , definiert durch $R_A f(x) := \tilde{R}_A T f(\delta_x) \quad \forall f \in \mathcal{L}(A)$

das Verlangte: Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}$ ist $R_A f \in \mathcal{L}$ für alle $f \in \mathcal{L}(A)$. Die Bedingungen (i) und (ii) sind offenbar erfüllt.

I.C. Der relative Choquet-Rand

Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{L}$ Funktionenräume auf X mit $\mathcal{H} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{H}_0$.

Dann gilt: $\mathcal{H}_0 = \mathcal{L}_0$.

I.18. Definition: (FRANCHETTI)

$\partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} X := \{x \in X \mid \mathcal{H}_x(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_x(\mathcal{L})\}$ heiße relativer Choquet-Rand von $\mathcal{H}$ bezüglich $\mathcal{L}$.

I.19. Beispiele:

$$1. \partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{H}} X = \partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{H}_0} X$$

$$2. \partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} X =: X.$$

Setzt man wie früher (und üblich) für $f \in \mathcal{L}_0 = \mathcal{H}_0$ und $x \in X$:

$$\hat{f}(x) = \inf\{h(x) \mid h \in \mathcal{H}, h \geq f\}, \quad \check{f}(x) = -(\hat{-f})(x) \text{ und}$$

$$B_f^{\mathcal{H}} := \{x \in X \mid \check{f}(x) = \hat{f}(x)\}, \text{ dann gilt (BAUER [3], Lemma 2.2):}$$

$$[\check{f}(x), \hat{f}(x)] = \{\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})\}.$$

I.20. Folgerungen:

$$1. B_f^{\mathcal{H}} = \{x \in X \mid \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) \implies \mu(f) = f(x)\} \text{ für alle } f \in \mathcal{L}_0.$$

$$2. \partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} X = \bigcap_{f \in \mathcal{L}} B_f^{\mathcal{H}}.$$

I.21. Bemerkungen:

1. In FRANCHETTI, Theorem 1, wird für kompaktes X bewiesen:

Ist $A \subset X$ mit $\partial_{\mathcal{H}} X \subset A$, dann existiert ein größter Teilraum

$\mathcal{L} \subset \mathcal{H}_0$ mit $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ und $A \subset \partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} X$. Der Beweis überträgt sich wrt-

lich auf lokal-kompaktes X , falls man $\mathcal{C}(X)$ durch $\mathcal{H}_0$ ersetzt.

2. Ist umgekehrt $\mathcal{L}$ mit $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ gegeben, so gilt:

$$\partial_{\mathcal{L}} X \subset \partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} X \iff \partial_{\mathcal{H}} X = \partial_{\mathcal{L}} X.$$

Beweis:

Sei $x \in \partial_{\mathcal{L}} X$ und $\partial_{\mathcal{L}} X \subset \partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} X$, dann ist $\{\varepsilon_x\} = \mathcal{U}_X(\mathcal{L}) = \mathcal{U}_X(\mathcal{H})$, also $x \in \partial_{\mathcal{H}} X$. Wegen $\partial_{\mathcal{H}} X \subset \partial_{\mathcal{L}} X$ ist also $\partial_{\mathcal{H}} X = \partial_{\mathcal{L}} X$. Ist umgekehrt $x \in \partial_{\mathcal{L}} X$ und $\partial_{\mathcal{L}} X = \partial_{\mathcal{H}} X$, dann ist $\{\varepsilon_x\} = \mathcal{U}_X(\mathcal{L}) = \mathcal{U}_X(\mathcal{H})$, also $x \in \partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} X$. Ferner zeigt der Fall $\mathcal{H} = \mathcal{L}$ und $\partial_{\mathcal{H}} X \neq X$, daß sehr wohl $\partial_{\mathcal{H}} X = \partial_{\mathcal{L}} X$, aber $\partial_{\mathcal{L}} X \neq \partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} X$ sein kann.

3. Ist $\overline{\partial_{\mathcal{L}} X} = \partial_{\mathcal{L}} X$, dann gilt: $\overline{\partial_{\mathcal{L}} X} \subset \partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} X \iff \partial_{\mathcal{H}} X = \partial_{\mathcal{L}} X$.

I.22. Beispiele:

1. $X = [-1, 1]$

$$\mathcal{H} = \{x \longrightarrow a + bx + dx^3 \mid a, b, d \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{L} = \{x \longrightarrow a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Dann sind $\mathcal{H}$ und $\mathcal{L}$ Funktionenräume auf X , $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$.

Wegen $\partial_{\mathcal{L}} X = X$ und $\partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} X = \{x \in X \mid \mathcal{U}_X(\mathcal{H}) = \mathcal{U}_X(\mathcal{L})\}$ ist also

$$\partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} X = \partial_{\mathcal{H}} X.$$

Zur Bestimmung von $\partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} X$ ist also $\partial_{\mathcal{H}} X$ zu berechnen.

$\mathcal{H}$ und damit $\mathcal{H}^\Delta = H^\Delta$ sind offenbar isomorph zum $\mathbb{R}^3$.

Es ist $\delta(x) = (1, x, x^3) \in \mathbb{R}^3$, wobei δ die kanonische Einbettung von X in H^Δ sei.

Der Zustandsraum $S(\mathcal{H})$ in H^Δ ist $\overline{\text{co}}\{\delta(x)\}$.

Wegen $\partial_{\mathcal{H}} X = \{x \in X \mid \delta(x) \text{ Extrempunkt von } S(\mathcal{H})\}$ ergibt sich

$$\text{hieraus direkt } \partial_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} X = \partial_{\mathcal{H}} X = \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

2. Sei U offene, konvexe, relativ-kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$,
 $n \geq 2$.

$$\mathcal{K} := \{h \in \mathcal{C}(\bar{U}) \mid h \text{ stetig, affin}\}$$

$$\mathcal{L} := \{l \in \mathcal{C}(\bar{U}) \mid l \text{ harmonisch in } U\}.$$

Für $x \in U$ ist offenbar $\mathcal{M}_x(\mathcal{L})$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{M}_x(\mathcal{K})$;
 also ist wegen $\partial_{\mathcal{L}} X = U^*$ der relative Choquet-Rand $\partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}} X$ von $\mathcal{K}$
 bezüglich $\mathcal{L}$ gleich dem Choquet-Rand $\partial_{\mathcal{K}} X$ von $\mathcal{K}$.

3. Sei $X = [0, 1]$; $\lambda :=$ Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$; $\mu := \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)$.

$$\mathcal{K} := \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(0) = \lambda(f), f(1) = \mu(f)\}$$

$$\mathcal{L} := \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(0) = \lambda(f)\}.$$

$$\text{Dann ist } \partial_{\mathcal{L}} X =]0, 1[, \partial_{\mathcal{K}} X =]0, 1], \partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}} X = [0, 1[.$$

Auf ähnliche Weise lassen sich noch viele weitere Beispiele
 konstruieren.

II. Korovkin-Sätze für Funktionenräume

II.A. Der relative Korovkin-Abschluß

In diesem Kapitel seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{L}$ Funktionenräume auf X mit

$$\mathcal{X} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{C}_0.$$

Ferner sei τ eine Topologie des Paares $(\mathcal{L}_0, M)$.

II.1. Definition:

Wir sagen, $f \in \mathcal{L}$ gehöre zum (relativen) Korovkin-Abschluß von $\mathcal{X}$ bezüglich $(\mathcal{L}, \tau)$, falls gilt:

Ist $(T_i)_{i \in I}$ ein Netz linearer positiver Operatoren T_i von $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}$ mit $\lim_{i \in I} T_i h = h \quad \forall h \in \mathcal{X}$, dann ist $\lim_{i \in I} T_i f = f$ (jeweils bezüglich der τ -Konvergenz).

Mit $K(\mathcal{X}, \mathcal{L}, \tau)$ bezeichnen wir die Menge aller $f \in \mathcal{L}$, die im Korovkin-Abschluß von $\mathcal{X}$ bezüglich $(\mathcal{L}, \tau)$ liegen. $K(\mathcal{X}, \mathcal{L}, \tau)$ heißt der (relative) Korovkin-Abschluß bezüglich $(\mathcal{L}, \tau)$. Schließlich heiße $\mathcal{X}$ Korovkin-Raum bezüglich $(\mathcal{L}, \tau)$, falls $\mathcal{L}$ der Korovkin-Abschluß bezüglich $(\mathcal{L}, \tau)$ ist.

II.2. Bemerkungen:

1. Ist $f \in K(\mathcal{X}, \mathcal{L}, \tau)$, dann gilt insbesondere: Ist $(T_i)_{i \in I}$ Netz linearer positiver Operatoren T_i von $\mathcal{C}(X)$ in $\mathcal{L}$ mit $\lim_{i \in I} T_i h = h \quad \forall h \in \mathcal{X}$, dann ist auch $\lim_{i \in I} T_i f = f$.

2. Für die Fälle $\mathcal{L} = \mathcal{C}(X)$ und $\tau =$ Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X bzw. $\mathcal{L} = \mathcal{K}_0$ und $\tau =$ Ordnungstopologie auf $\mathcal{K}_0$ wird in BAUER [3] bzw. BAUER [4] gezeigt:

Der Korovkin-Abschluß von $\mathcal{K}$ bezüglich $(\mathcal{L}, \tau)$ ist genau der Raum der $\mathcal{K}$ -affinen Funktionen. Insbesondere ist $\mathcal{K}$ genau dann Korovkin-Raum bezüglich $(\mathcal{L}, \tau)$, wenn gilt: $\partial_{\mathcal{K}} X = X$.

Zur Untersuchung des allgemeinen Falles $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}_0$ benutzen wir die

II.3. Definition (RUDIN-STOUT):

Eine Teilmenge $S \subset X$ heißt determinierende Menge für $\mathcal{L}$ (kurz: D-Menge für $\mathcal{L}$), falls gilt:

$$l \in \mathcal{L}, l(x) = 0 \quad \forall x \in S \implies l = 0.$$

II.4. Beispiele:

1. S D-Menge für $\mathcal{L}$, $S \subset T \subset X \implies T$ D-Menge für $\mathcal{L}$. Insbesondere ist $S = X$ stets D-Menge für $\mathcal{L}$.
2. $\partial_{\mathcal{L}} X$ ist D-Menge für $\mathcal{L}$.
3. Ist $\mathcal{L}$ endlich dimensional, $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L} = n$, dann existiert eine D-Menge für $\mathcal{L}$, die aus genau n Punkten von X besteht. Zum Beweis zeigen wir durch vollständige Induktion über $n = \dim \mathcal{L}$:
Ist $\{l_1, \dots, l_n\}$ Basis von $\mathcal{L}$, dann existieren $x_1, \dots, x_n \in X$ derart, daß die Matrix $(\delta_{x_j}(l_i))_{i,j=1, \dots, n}$ nicht-singulär ist.
 $n = 1$: klar
 $n \longrightarrow n+1$: Sei $\{l_1, \dots, l_{n+1}\}$ Basis von $\mathcal{L}$.

Nach Induktionsannahme existieren $x_1, \dots, x_n \in X$ derart, daß

$A_n := \det(\delta_{x_j}(\ell_i))_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$ ist.

Für $x_{n+1} \in X$ ist $A_{x_{n+1}} := \det(\delta_{x_j}(\ell_i))_{i,j=1,\dots,n+1} =$
 $= \ell_1(x_{n+1}) \cdot B_0 + \ell_2(x_{n+1}) \cdot B_1 + \dots + \ell_n(x_{n+1}) \cdot B_{n-1} +$
 $+ \ell_{n+1}(x_{n+1}) \cdot B_n$, wobei $B_i \in \mathbb{R}$, $B_n = A_n$ ist.

Wegen $A_n \neq 0$, $\ell_1, \dots, \ell_{n+1}$ linear unabhängig, folgt:

Es existiert ein $x_{n+1} \in X$ mit $A_{x_{n+1}} \neq 0$.

Ist nun $\ell \in \mathcal{L}$, $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ Basis von $\mathcal{L}$, $\ell = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ell_i$,

dann sind die $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ durch $\ell(x_1), \dots, \ell(x_n)$ eindeutig
 bestimmt; also ist $\{x_1, \dots, x_n\}$ D-Menge für $\mathcal{L}$.

4. Ist X eine konvexe kompakte Menge in einem lokal-konvexen
 Raum und $\mathcal{L}$ der Raum der stetigen affinen Funktionen auf X ,
 dann ist jede Menge S , die eine Berandung von X im Sinne von
 HESS ist, eine abgeschlossene D-Menge für $\mathcal{L}$.
5. Wählt man in DONNER [2] II $E = F = \mathcal{L}_0$, $E_0 = \mathcal{L}$, und P die
 Identität auf $\mathcal{L}_0$, dann ist jede P -wesentliche Menge eine D-
 Menge für $\mathcal{L}$.

II.5. Bemerkungen:

1. Im endlich-dimensionalen Fall gilt für die nach obigem Beispiel 3
 existierende D-Menge $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ darüber hinaus: $\mathcal{L}|_S = \mathcal{C}(S)$.
2. Ist X ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ und $\mathcal{L}$ der Raum der reellen
 Polynome auf X mit $\text{grad} \leq n$, so ist jede Menge von $n+1$ verschiedenen
 Punkten von X D-Menge für $\mathcal{L}$. (Vandermondesche Determinante!).

3. Seien X und $\mathcal{L}$ wie in Bemerkung 2 mit $n \geq 2$. Dann ist bekanntlich

$\partial_{\mathcal{L}} X = X$, also $\partial_{\mathcal{L}} X$ für mehrpunktiges X keine minimale D-Menge für $\mathcal{L}$.

4. Eine einfache Anwendung des Satzes von Hahn-Banach zeigt:

$S \subset X$ ist genau dann D-Menge für $\mathcal{L}$, wenn die Menge $\{\delta_x \mid x \in S\}$ total in L^Δ ist.

Im folgenden sei τ stets die auf $\mathcal{L}$ induzierte Ordnungstopologie von $\mathcal{L}_0$ oder die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X auf $\mathcal{L}$.

Für eine abgeschlossene Teilmenge S von X sei τ_S die entsprechende Topologie auf $\mathcal{L}|_S$. (Für die Ordnungstopologie auf $\mathcal{L}_0|_S$ vgl.

BAUER [4], Teil 1).

II.6. Theorem:

Sei S abgeschlossene D-Menge für $\mathcal{L}$ und die Restriktionsabbildung

p_S von $\mathcal{L}$ auf $\mathcal{L}|_S$ offen.

Dann gilt für $f \in \mathcal{L}$:

$$S \subset B_f^{\mathcal{L}} \implies f \in K(\mathcal{L}, \mathcal{L}, \tau) .$$

Beweis:

Sei $(T_i)_{i \in I}$ ein Netz positiver linearer Operatoren

$$T_i : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \text{ mit } \lim_{i \in I} T_i h = h \quad \forall h \in \mathcal{L}$$

Da S D-Menge für $\mathcal{L}$ ist, ist $p_S : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}|_S$ bijektiv, also sind

für alle $i \in I$ die Operatoren

$T_i^S := p_S \circ T_i \circ p_S^{-1}$ von $\mathcal{X}|_S$ in $\mathcal{X}|_S$ wohldefiniert.

Ferner gilt trivialerweise $\lim_{i \in I} T_i^S p_S h = p_S h \quad \forall h \in \mathcal{X}$.

Sei nun $f \in \mathcal{A}$ mit $S \subset B_f^{\mathcal{X}}$.

1. Fall: τ = Ordnungstopologie auf $\mathcal{X}_O$:

Nach BAUER [4], Theorem 3.1., konvergiert $(T_i^S p_S(f))_{i \in I}$ gegen $p_S(f)$.

2. Fall: τ = Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X :

Nach BAUER [3], Proposition 1.4., konvergiert ebenfalls $(T_i^S p_S(f))_{i \in I}$ gegen $p_S(f)$.

In jedem Fall gilt damit wegen der Offenheit von p_S :

$$\lim_{i \in I} T_i f = f.$$

II.7. Korollar:

Seien die Voraussetzungen wie in Theorem II.6. Zusätzlich gelte noch, daß $S \subset \partial_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}$ ist. Dann ist $\mathcal{X}$ Korovkin-Raum bezüglich $(\mathcal{X}, \tau)$.

Beweis:

Aus $S \subset \partial_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}$ folgt, daß $S \subset B_f^{\mathcal{X}}$ ist für alle $f \in \mathcal{A}$.

II.8. Korollar:

Ist $\mathcal{X}$ B-vollständig (z.B. für X kompakt und $\mathcal{X}$ abgeschlossen in $\mathcal{X}_O = \mathcal{C}(X)$), S abgeschlossene D-Menge für $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}|_S$ tonneliert (z.B. S kompakt und $\mathcal{X}|_S$ abgeschlossen in $\mathcal{C}(S)$), dann gilt für $f \in \mathcal{A}$:

$$S \subset B_f^{\mathcal{X}} \implies f \in K(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \tau).$$

Insbesondere gilt unter diesen Voraussetzungen:

$$S \subset \partial_{\mathcal{X}}^{\mathcal{K}} X \implies \mathcal{K} \text{ Korovkin-Raum bezüglich } (\mathcal{X}, \tau).$$

Beweis:

Wegen des "Open Mapping Theorems" (siehe z.B. SCHAEFER [1], p. 164, Corollary 1) ist unter den obigen Voraussetzungen die Restriktionsabbildung p_S offen.

II.9. Korollar:

Ist τ die Ordnungstopologie auf $\mathcal{X}_0$, dann gehört jedes $f \in \mathcal{L}$ mit $\overline{\partial_{\mathcal{X}} X} \subset B_f^{\mathcal{K}}$ zu $K(\mathcal{K}, \mathcal{X}, \tau)$. Insbesondere ist $\mathcal{K}$ Korovkin-Raum bezüglich $(\mathcal{X}, \tau)$, falls $\overline{\partial_{\mathcal{X}} X} \subset \partial_{\mathcal{X}}^{\mathcal{K}} X$ ist.

Beweis:

Da $S := \overline{\partial_{\mathcal{X}} X}$ abgeschlossene D-Menge für $\mathcal{X}$ ist, bleibt nur noch die Offenheit der Restriktionsabbildung p_S zu zeigen.

Da $\mathcal{X}_+$ kofinal in $\mathcal{X}_{0+}$ ist, ist nach BAUER [4], Remark 1.3.1. ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen der auf $\mathcal{X}$ induzierten Ordnungstopologie gegeben durch $(V_e)_{e \in E}$ mit

$$V_e = \{f \in \mathcal{L} : \exists l_1, \dots, l_n \in \mathcal{X}_+, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ und } |f| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot l_i\}, \text{ wobei } E \text{ die Menge der strikt positiven reellen Funktionen auf } \mathcal{X}_+ \text{ ist.}$$

Für die auf $\mathcal{X}|_S$ induzierte Ordnungstopologie von $\mathcal{X}_0|_S$ gilt entsprechend (siehe BAUER [4], Lemma 1.4.):

Ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen ist gegeben durch $(V_\varepsilon^S)_{\varepsilon \in E}$,

wobei

$$V_\varepsilon^S := \{f|_S \in \mathcal{L}|_S : \exists l_1, \dots, l_n \in \mathcal{L}_+, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+, \sum \lambda_i = 1 \\ \text{und } |f| \leq \sum \lambda_i \varepsilon(l_i) \cdot l_i \text{ auf } S\}.$$

Wegen des Minimumprinzips folgt hieraus die Offenheit der Abbildung p_S .

II.10. Korollar:

Sei τ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X auf $\mathcal{L}$. Ferner erfülle $\mathcal{L}$ die Bedingung I.14. (2). Dann gilt wie in Korollar II.9: Jedes $f \in \mathcal{L}$ mit $\overline{\partial_{\mathcal{L}} X} \subset B_f^{\mathcal{L}}$ gehört zu $K(\mathcal{L}, \mathcal{L}, \tau)$. Insbesondere ist wieder $\mathcal{K}$ Korovkin-Raum bezüglich $(\mathcal{L}, \tau)$, falls gilt $\overline{\partial_{\mathcal{L}} X} \subset \partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}} X$.

Beweis:

Wieder ist nur die Offenheit der Restriktionsabbildung p_S für $S := \overline{\partial_{\mathcal{L}} X}$ zu zeigen.

Sei also K kompakte Teilmenge von X .

Dann ist $C := \{\delta_x \mid x \in K\}$ kompakte Teilmenge der nach Bedingung I.14. (2) existierenden Basis B von L_+^{Δ} .

Wieder wegen I.14. (2) existiert dann eine kompakte Seite F von B mit $C \subset F$. Da F Seite von B ist, ist $\text{ex} F \subset \text{ex} B = \{\delta_x \mid x \in \partial_{\mathcal{L}} X\}$.

Damit aber ist $\overline{\text{ex} F} \subset \{\delta_x \mid x \in \overline{\partial_{\mathcal{L}} X}\}$ und $\overline{\text{ex} F}$ kompakt.

$A := \{x \in X \mid \delta_x \in \overline{\text{ex} F}\}$ ist somit kompakte Teilmenge von $\overline{\partial_{\mathcal{L}} X}$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz auf A folgt damit gleichmäßige Kon-

vergenz auf F und damit auf K für ein Netz von Funktionen in $\mathcal{L}$.
Daraus aber ergibt sich die Offenheit von p_S .

II.11. Beispiel:

Seien $X, \mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ wie in Beispiel I.22.1.

Wir wissen $\partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}} X = \partial_X X = [-1, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$.

Da jede Menge von vier verschiedenen Punkten von X eine abgeschlossene D -Menge S für $\mathcal{L}$ ist mit $\mathcal{L}|_S = \mathcal{C}(S)$, ist nach Korollar II.8. $\mathcal{K}$ Korovkin-Raum bezüglich $(\mathcal{L}, \tau)$. (Da X kompakt ist, ist τ hierin beiden Fällen die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.)

II.12. Bemerkungen:

1. Das Beispiel II.11. zeigt, daß die Bedingung $\overline{\partial_{\mathcal{K}} X} \subset \partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}} X$ aus den Korollaren II.10. und II.11. im allgemeinen nicht notwendig ist dafür, daß $\mathcal{K}$ Korovkin-Raum bezüglich $(\mathcal{L}, \tau)$ ist; denn es ist in diesem Beispiel ja $\partial_X X = X$. Damit ist die Behauptung des Theorems 1 in ŠAŠKIN [1] in ihrem "only if"-Teil falsch.

Wir werden jedoch im nächsten Kapitel zeigen, daß für gewisse simpliziale Funktionenräume $\mathcal{L}$ die Bedingung $\overline{\partial_{\mathcal{K}} X} \subset \partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}} X$ auch notwendig ist dafür, daß $\mathcal{K}$ Korovkin-Raum bezüglich $(\mathcal{L}, \tau)$ ist, wobei τ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X ist.

2. Theorem II.6. ist eine Verallgemeinerung des Lemmas V.22. in HESS, da jede Berandung S im dortigen Sinne eine abgeschlossene D -Menge für $\mathcal{L} = A(X)$ ist und die Restriktionsabbildung p_S in der dortigen Situation offen ist.

3. Die hier behandelte Situation unterscheidet sich von der bisher fast durchwegs im Zusammenhang mit Korovkin-Sätzen untersuchten im wesentlichen darin, daß der Bildbereich der in der Definition des Korovkin-Abschlusses vorkommenden Operatoren T_i im allgemeinen kein Verband ist. Demzufolge ist eine Funktion f , die zum Korovkin-Abschluß von $\mathcal{K}$ gehört, nicht notwendig $\mathcal{K}$ -affin; denn das würde ja $X \in B_f^{\mathcal{K}}$ bedeuten. Eine gewisse Verallgemeinerung durch Einführung der (H,P) -affinen Funktionen und P -wesentlichen Mengen findet sich bei DONNER [2]. Aber auch dort wird als Bildbereich der Operatoren T_i immer ein Verband gefordert.

II.B. Charakterisierung des relativen Korovkin-Abschlusses für simpliciale Funktionenräume.

In diesem Kapitel seien wieder $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ Funktionenräume auf X mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{K}_0$.

Zusätzlich sei $\mathcal{L}$ simplicial und erfülle die Bedingungen I.14. (1) und (2).

Ferner sei τ im folgenden stets die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X . Wir schreiben deshalb stets kurz $K(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ für $K(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \tau)$ und "Korovkin-Abschluß bezüglich $\mathcal{L}$ " bzw. "Korovkin-Raum bezüglich $\mathcal{L}$ " statt "Korovkin-Abschluß bezüglich $(\mathcal{K}, \tau)$ " bzw. "Korovkin-Raum bezüglich $(\mathcal{L}, \tau)$ ".

Für jede kompakte Teilmenge A von $\partial_{\mathcal{L}} X$ sei wieder p_A die Restriktionsabbildung von $\mathcal{L}$ auf $\mathcal{C}(A)$ (p_A ist hier surjektiv!) und R_A ein nach Theorem I.17. existierender ordnungstreuer Isomorphismus von $\mathcal{C}(A)$ in $\mathcal{L}$, der die dort angegebenen Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Schließlich sei $\mathcal{K}$ das durch Inklusion geordnete System der kompakten Teilmengen A von $\partial_{\mathcal{L}} X$.

II.13. Lemma:

Für jedes $l \in \mathcal{L}$ konvergiert $(R_A p_A l)_{A \in \mathcal{K}}$ gegen l .

Beweis:

Wir benützen die Bezeichnungen von I.14.(2).

Dann ist die gleichmäßige Konvergenz von $(R_A p_A l)_{A \in \mathcal{K}}$ gegen l auf jeder kompakten Seite F_n von B zu zeigen.

(Dabei fassen wir ℓ und $R_{A^p A} \ell$ für jedes $A \in \bar{B}$ als stetige affine Funktion auf B auf; ihre Restriktionen auf F_n gehören also zum Raum $A(F_n)$ der stetigen affinen Funktionen auf F_n). Nun ist, wie im Beweis von Lemma I.16. gezeigt wurde, F_n ein metrisierbares Simplex.

Weiter gilt: $\text{ex} F_n = \{\delta_x \mid x \in \partial_{\mathcal{X}} X\} \cap F_n$, da F_n Seite von B ist und somit jeder Extrempunkt von F_n auch Extrempunkt von B und damit ein δ_x mit $x \in \partial_{\mathcal{X}} X$ ist.

Sei nun $Y := \overline{\text{ex} F_n}$. Dann besitzt jedes $y \in Y$ genau ein Darstellungsmaß μ_y (bezüglich $A(F_n)$), welches von $\text{ex}(F_n)$ getragen wird (F_n metrisierbar!).

Wir wählen $\varepsilon > 0$. Dann existiert für alle $y \in Y$ eine kompakte Teilmenge C_y von $\text{ex} F_n$ mit $\mu_y(F_n \setminus C_y) < \varepsilon$. Also gilt für alle kompakten Teilmengen A von $\partial_{\mathcal{X}} X$ mit $C_y \subset \delta(A)$:

$$|R_{A^p A} \ell(y) - \ell(y)| = |\mu_y(R_{A^p A} \ell - \ell)| < 2\varepsilon \|\ell\|_{F_n}, \text{ da}$$

$R_{A^p A} \ell = \ell$ auf $\delta(A)$ ist.

Dann aber existiert eine Umgebung U_y von y in Y derart, daß

$$|R_{A^p A} \ell(z) - \ell(z)| < 2\varepsilon \|\ell\|_{F_n} \text{ gilt für alle } z \in U_y. \text{ Die } U_y \text{ mit}$$

$y \in Y$ überdecken Y , also existieren wegen der Kompaktheit von Y

endlich viele $y_1, \dots, y_n \in Y$ mit $Y \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$.

Setzt man $C := \bigcup_{i=1}^n C_{y_i}$, dann ist C kompakt in $\text{ex} F_n$ und für alle

kompakten $A \subset \partial_{\mathcal{X}} X$ mit $C \subset \delta(A)$ gilt:

$$|R_{A^p A} \ell(z) - \ell(z)| < 2\varepsilon \|\ell\|_{F_n} \text{ für alle } z \in Y.$$

Wegen des Minimumprinzips gilt dies dann aber auch für alle $z \in F_n$.

Wir kommen nun zu der in der Überschrift angekündigten Charakterisierung des relativen Korovkin-Abschlusses.

II.14. Theorem:

Sei $f \in \mathcal{L}$. Dann sind äquivalent:

- (i) $f \in K(\mathcal{K}, \mathcal{L})$
- (ii) $\overline{\partial_X X} \subset B_f^{\mathcal{L}}$.

Beweis:

Wegen Korollar II.10. ist nur noch zu zeigen, daß (ii) aus (i) folgt.

Sei also $f \in K(\mathcal{K}, \mathcal{L})$, $x \in \overline{\partial_X X}$.

Wegen Folgerung I.20.1. ist zu zeigen, daß gilt:

$$\mu(f) = f(x) \text{ für alle } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{K}).$$

Sei also $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{K})$.

Weiter sei $(V_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ein fundamentales Umgebungssystem von x in X .

Γ sei in kanonischer Weise geordnet ($\gamma_1 \leq \gamma_2 \iff V_{\gamma_1} \supset V_{\gamma_2}$).

Für alle $\gamma \in \Gamma$ sei $y_\gamma \in V_\gamma \cap \partial_X X$; ferner wähle man $f_\gamma : X \rightarrow [0, 1]$

stetig mit $f_\gamma(y_\gamma) = 1$, $f_\gamma = 0$ auf $X \setminus V_\gamma$.

Sei $I_1 := \mathcal{K} \times \Gamma$, versehen mit der Produktordnung.

$I := \{(A, \gamma) \in I_1 : y_\gamma \in A\}$ ist kofinale Teilmenge von I_1 .

Wir setzen nun für $(A, \gamma) \in I$:

$$S_{A, \gamma} : \begin{cases} \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}(A) \\ g \longrightarrow p_A(g + \mu(g) \circ f_\gamma - g \circ f_\gamma) \end{cases}$$

Dann ist $S_{A,\gamma}$ eine positive lineare Abbildung von $\mathcal{L}$ in $\mathcal{C}(A)$.

Wir definieren nun ein Netz von Operatoren T_i ($i \in I$) von $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}$ durch

$$T_i = T_{A,\gamma} := R_A \circ S_{A,\gamma} \text{ für } i = (A,\gamma) \in I.$$

Dann ist $T_{A,\gamma}$ positiv und linear.

Wir zeigen nun:

$$\lim_{i \in I} T_i h = h \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Sei dazu $h \in \mathcal{H}$, $\epsilon > 0$.

Dann existiert ein $\gamma_0 \in \Gamma$ mit $|\mu(h) - h(y)| = |h(x) - h(y)| < \epsilon$

$$\forall y \in V_\gamma, \quad \forall \gamma \geq \gamma_0.$$

Also ist $\|p_A h - S_{A,\gamma} h\|_A = \|p_A((h - \mu(h)) \cdot f_\gamma)\|_A < \epsilon$ für alle $(A,\gamma) \in I$ mit $\gamma \geq \gamma_0$.

Sei nun V eine Umgebung der Null in $\mathcal{L}$.

Wegen der Eigenschaft (ii) von R_A in I.17. gilt für alle $\gamma \geq \gamma_0$ und für alle $A \in \bar{K}$:

$$T_{A,\gamma} h - R_A p_A h = R_A (S_{A,\gamma} h - p_A h) \in V.$$

Nach Lemma II.13. existiert ein $A_0 \in \bar{K}$, so daß $R_A p_A h - h \in V$ ist für alle $A \in \bar{K}$ mit $A \geq A_0$.

Also gilt für alle $(A,\gamma) \in I$ mit $(A,\gamma) \geq (A_0, \gamma_0)$:

$$T_{A,\gamma} h - h = T_{A,\gamma} h - R_A p_A h + R_A p_A h - h \in V + V.$$

Damit konvergiert $(T_i h)_{i \in I}$ gegen h .

Wegen $f \in K(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ gilt dann auch $\lim_{i \in I} T_i f = f$.

Da aber $T_{A,\gamma} f(y_\gamma) = \mu(f)$ für alle $(A,\gamma) \in I$ und $x = \lim_{\gamma \in \Gamma} y_\gamma$ ist, folgt: $f(x) = \mu(f)$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

II.15. Korollar:

Der (relative) Korovkin-Abschluß von $\mathcal{K}$ bezüglich $\mathcal{L}$ ist genau der nach Bemerkung I.21.1 zu $A = \overline{\partial_{\mathcal{L}} X}$ existierende größte Teilraum $\mathcal{K}_1$ von $\mathcal{L}$ mit $A \subset \partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}_1} X$.

Beweis:

Sei $\mathcal{K}_1$ der größte Teilraum von $\mathcal{L}$ mit $\overline{\partial_{\mathcal{L}} X} \subset \partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}_1} X$. Wegen $\partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}_1} X = \bigcap_{f \in \mathcal{K}_1} B_f^{\mathcal{K}}$ ist dann $\mathcal{K}_1 \subset K(\mathcal{K}, \mathcal{L})$.

Andererseits gilt für jedes $f \in K(\mathcal{K}, \mathcal{L})$: $\overline{\partial_{\mathcal{L}} X} \subset B_f^{\mathcal{K}}$, also ist $K(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ ein Teilraum $\mathcal{K}_2$ von $\mathcal{L}$ mit $\overline{\partial_{\mathcal{L}} X} \subset \partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}_2} X$ und damit ist $\mathcal{K}_2 = K(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \subset \mathcal{K}_1$.

II.16. Korollar:

$\mathcal{K}$ ist genau dann Korovkin-Raum bezüglich $\mathcal{L}$, wenn gilt:

$$\overline{\partial_{\mathcal{L}} X} = \partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}} X.$$

II.17. Korollar:

Ist $\mathcal{K}$ Korovkin-Raum bezüglich $\mathcal{L}$, dann ist $\partial_{\mathcal{L}} X = \partial_{\mathcal{K}} X$. Ist $\partial_{\mathcal{L}} X$ abgeschlossen, dann gilt auch die Umkehrung.

Beweis:

Folgt aus Korollar II.16. zusammen mit Bemerkung I.21.2., wonach gilt:

$$\partial_{\mathcal{L}} X \subset \partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}} X \iff \partial_{\mathcal{L}} X = \partial_{\mathcal{K}} X.$$

II.18. Bemerkungen:

1. Theorem II.14. bzw. Korollar II.16 ist für metrisierbares X eine Verallgemeinerung von Theorem 3.3. bzw. Corollary 3.4 in BAUER [3]. Denn nach Beispiel I.15.3. erfüllt $\mathcal{L} = \mathcal{C}(X)$ die Bedingung I.14. (1) und (2) mit $\partial_{\mathcal{L}} X = \overline{\partial_{\mathcal{L}} X} = X$. Also ist in diesem Fall die Bedingung (ii) in Theorem II.14. äquivalent dazu, daß f $\mathcal{K}$ -affin ist. Ferner ist für $\mathcal{L} = \mathcal{C}(X)$ die Bedingung $\overline{\partial_{\mathcal{L}} X} \subset \partial_{\mathcal{L}}^{\mathcal{K}} X$ äquivalent zu $X = \partial_{\mathcal{K}} X$, da ja $\partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}} X = \partial_{\mathcal{K}} X$ ist.
2. Daß die Umkehrung in Korollar II.17. im allgemeinen falsch ist, zeigt folgendes

II.19. Beispiel:

$$X := [0,1], \quad \lambda := \text{Lebesgue-Maß auf } X, \quad \mu := \frac{1}{2} (\epsilon_{\frac{1}{2}} + \epsilon_1) .$$

$$\mathcal{L} := \{f \in \mathcal{C}(X) : f(0) = \lambda(f)\}$$

$$\mathcal{K} := \{f \in \mathcal{L} : f(0) = \mu(f)\} .$$

Dann sind $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ Funktionenräume auf X , $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ und $\mathcal{L}$ ist simplizial (da es außer dem Nullmaß kein Randmaß (bezüglich $\mathcal{L}$) gibt, das $\mathcal{L}$ annulliert). Da X kompakt ist, sind I.14.(1) und (2) automatisch erfüllt.

Ferner ist $\partial_{\mathcal{K}} X = \partial_{\mathcal{L}} X = \partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}} X =]0,1]$, also $\overline{\partial_{\mathcal{L}} X} \not\subset \partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}} X$ und damit nach Korollar II.16. $\mathcal{K}$ nicht Korovkin-Raum bezüglich $\mathcal{L}$.

Man kann hier übrigens in folgender Weise explizit eine Folge von positiven linearen Operatoren $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{L}$ in sich angeben, so daß gilt:

$(T_n h)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen h für alle $h \in \mathcal{H}$,

$(T_n \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nur punktweise, aber für $\ell \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{H}$ nicht gleichmäßig gegen ℓ .

Man setze nämlich

$$T_n \ell(x) = \begin{cases} \frac{1}{4n-1} \left[2\mu(\ell) + \ell\left(\frac{1}{n}\right) + 4n\lambda_n(\ell) \right] & , x = 0 \\ \mu(\ell) & , x = \frac{1}{2n} \\ \text{linear} & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ \ell(x) & , \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ \text{linear} & , \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

wobei $\lambda_n(\ell) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \ell(x) dx$ ist.

Man überlegt sich leicht, daß die Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die angegebenen Eigenschaften besitzt.

Anhang: Konstruktion von Operatoren im nicht-metrisierbaren Fall

Vorbemerkung:

Durch Korollar II.14 wurde das in dieser Arbeit gestellte Korovkin-Problem vollständig gelöst, d.h. es wurde der Korovkin-Abschluß von $\mathcal{K}$ bezüglich $\mathcal{L}$ charakterisiert unter der Voraussetzung, daß $\mathcal{L}$ simplizial und X metrisierbar ist.

Dazu waren positive lineare Operatoren von $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}$ anzugeben, bei deren Konstruktion an entscheidender Stelle, nämlich im Beweis von Lemma I.16., die Metrisierbarkeit von X bei der Anwendung des Satzes von LAZAR benutzt wurde.

Wir wollen uns nun im folgenden von der Voraussetzung der Metrisierbarkeit von X befreien, beschränken uns dabei jedoch auf den kompakten Fall. Im folgenden sei also stets X ein beliebiger kompakter topologischer Raum.

Bei der Konstruktion der oben angesprochenen Operatoren von $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}$ spielte das System $\tilde{\mathcal{K}}$ der kompakten Teilmengen von $\partial_{\mathcal{L}}X$ eine grundlegende Rolle. Nun weiß man aber, daß für simpliziales $\mathcal{L}$ jede kompakte Teilmenge von $\partial_{\mathcal{L}}X$ abgeschlossen ist in der facialen Topologie auf $\partial_{\mathcal{L}}X$. Man könnte also versucht sein, bei der Konstruktion von positiven linearen Operatoren von $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}$ die facial-stetigen Funktionen, also das "Zentrum von $\mathcal{L}$ ", heranzuziehen. Aber dieses "Zentrum von $\mathcal{L}$ " kann auch für simpliziales $\mathcal{L}$ trivial sein, d.h. es ist möglich, daß nur die Konstanten stetig sind in der facialen Topologie auf $\partial_{\mathcal{L}}X$, so daß es damit nicht

gelingt, "hinreichend viele" Operatoren von $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}$ zu gewinnen
(- wie es etwa in dem in Beispiel II.17 angegebenen $\mathcal{L}$ der Fall
ist).

Benutzt man jedoch statt der stetigen die in der facialen Topologie
halbstetigen Funktionen, so kann man auch im nichtmetrisierbaren
Fall "hinreichend viele" Operatoren auf $\mathcal{L}$ erhalten, deren entschei-
den der Nachteil aber ist, daß der Bildbereich nicht $\mathcal{L}$, sondern der
Raum der "Differenzen von halbstetigen beschränkten $\mathcal{L}$ -affinen
Funktionen auf X " ist. Dies soll im folgenden genauer beschrieben
werden.

Dazu brauchen wir zwei vorbereitende Lemmata:

Lemma 1:

Sei K ein kompaktes (Choquet-) Simplex, $x \in \overline{\text{ex}K}$, V offene Umgebung
von x in K und $y \in V \cap \text{ex}K$. Dann existiert eine in der facialen
Topologie von $\text{ex}K$ nach oben halbstetige Funktion $a_V : \text{ex}K \rightarrow [0,1]$
mit $a_V = 0$ auf $\text{ex}K \setminus V$, $a_V(y) = 1$.

Beweis:

Es ist $\text{ex}K = \bigcup_{f \in \mathcal{L}(K)} B_f$, $B_f = B_f^{A(K)}$ (Notation aus I.C).

Für jedes $f \in \mathcal{L}(K)$ ist B_f eine G_δ -Menge, also

$$B_f = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n^f, \quad G_n^f \text{ offen} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow V \cap G_n^f \text{ offen, } y \in V \cap G_n^f \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \exists b_n^f \in \mathcal{L}(K), \quad 0 \leq b_n^f \leq 1, \quad b_n^f(y) = 1, \\ b_n^f = 0 \text{ auf } K \setminus (V \cap G_n^f).$$

Wir setzen $b^f := \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n^f$; dann ist b^f nach oben halbstetig,

$$0 \leq b^f \leq 1, \quad b^f(y) = 1, \quad b^f = 0 \text{ auf } K \setminus (V \cap B_f) \implies b_v := \inf_{f \in \mathcal{C}(K)} b^f$$

ist ebenfalls nach oben halbstetig, $b_v(y) = 1, b_v = 0$ auf

$K \setminus (V \cap \text{ex}K)$.

Schließlich setzen wir $a_v := b_v|_{\text{ex}K}$.

Dann ist $a_v : \text{ex}K \longrightarrow [0, 1], a_v(y) = 1, a_v = 0$ auf $\text{ex}K \setminus V$.

$$\text{Für } \alpha \in \mathbb{R} \text{ ist } \{a_v \geq \alpha\} = \begin{cases} \text{ex}K, & \alpha \leq 0 \\ \text{kompakt } c \text{ ex}K, & \alpha > 0. \end{cases}$$

Also ist a_v nach oben halbstetig in der facialen Topologie von $\text{ex}K$, da wegen der Simplex-Eigenschaft von K jede kompakte Teilmenge von $\text{ex}K$ abgeschlossen ist in der facialen Topologie auf $\text{ex}K$.

Lemma 2:

Seien K, x, V und a_v wie in Lemma 1.

Ferner sei $A_S(K)$ der Kegel der nach unten beschränkten, nach oben halbstetigen affinen Funktionen von K in $\mathbb{R}$.

Dann existiert ein linearer Operator

$$R_v : A(K) \longrightarrow A_S(K) - A_S(K) \text{ mit}$$

- (i) $R_v g = a_v \cdot g$ auf $\text{ex}K$
- (ii) $0 \leq R_v g \leq g \quad \forall g \in A(K), g \geq 0$.

Beweis:

Da a_v nach oben halbstetig in der facialen Topologie und beschränkt ist, existiert zu jedem $a \in A(K)_+$ eine eindeutig be-

stimme nach oben halbstetige beschränkte affine Funktion

$b_a : K \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $b_a = a \cdot a_v$ auf $\text{ex}K$ (ALFSEN, Theorem II.7.2.).

Für $g \in A(K)$ sei $\alpha_g := \max(-\inf g(K), 0)$, also $\alpha_g \geq 0$. Wegen

$g + \alpha_g \geq 0$ existieren eindeutig bestimmte nach oben halbstetige

beschränkte affine Funktionen $g_1, g_2 : K \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $g_1 = (g + \alpha_g) \cdot a_v$,

$g_2 = \alpha_g \cdot a_v$ auf $\text{ex}K$.

Wir setzen nun

$$R_v : \begin{cases} A(K) \longrightarrow A_S(K) - A_S(K) \\ g \longrightarrow g_1 - g_2 \end{cases}$$

Dann ist $R_v g = (g + \alpha_g) \cdot a_v - \alpha_g \cdot a_v = g \cdot a_v$ auf $\text{ex}K$.

Sei $h = h_1 - h_2 \in A_S(K) - A_S(K)$ mit $h = g \cdot a_v = g_1 - g_2$ auf $\text{ex}K$.

Dann ist $h_1 + g_2 = h_2 + g_1$ auf $\text{ex}K$, also nach dem Vergleichsprinzip für halbstetige affine Funktionen

$$h_1 + g_2 = h_2 + g_1, \text{ also } h = R_v g.$$

Daraus ergibt sich die Linearität von R_v .

Ferner gilt: $g \in A(K)_+ \implies 0 \leq R_v g = a_v \cdot g \leq g$ auf $\text{ex}K$, also

$$0 \leq R_v g \leq g.$$

Sei nun $\mathcal{X}$ ein simplizialer Funktionenraum auf X .

$\mathcal{L}_S := \{f \in \mathbb{R}^X \mid f \text{ beschränkt; } \exists \text{ absteigend filtrierendes}$

$$\text{Netz } (\ell_i)_{i \in I} \subset \mathcal{X} \text{ mit } f = \inf_{i \in I} \ell_i \}.$$

Dann ist $\mathcal{L}_S$ ein konvexer Kegel, der Kegel der "nach oben halbstetigen $\mathcal{L}$ -affinen Funktionen auf X ".

(Eine Funktion $f \in \mathcal{L}_S$ heißt $\mathcal{L}$ -affin, weil $f(x) = \int f d\mu$ ist für

alle $x \in X$, für alle $\mu \in \mathcal{U}_X(\mathcal{X})$).

$\mathcal{A}(\mathcal{L}) := \mathcal{L}_S - \mathcal{L}_S$ ist der Raum der "Differenzen beschränkter, nach oben halbstetiger $\mathcal{L}$ -affiner Funktionen auf X ".

$K := S(\mathcal{L})$ sei der Zustandsraum von $\mathcal{L}$, $\delta : X \longrightarrow K$ sei die kanonische homöomorphe Einbettung.

Dann gibt es ordnungstreue isometrische Isomorphismen

$$\phi : \mathcal{K} \longrightarrow A(K, L^{\Delta}) \quad \text{und}$$

$$\psi : \mathcal{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow A_S(K) - A_S(K)$$

wobei $A(K, L^{\Delta})$ der Raum der stetigen affinen Funktionen auf K ist, die Restriktionen von stetigen Linearformen auf L^{Δ} (Dualraum von $\mathcal{L}$) sind (ALFSEN, Theorem II.1.8. zusammen mit Corollary I.1.4.).

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun folgendes Ergebnis beweisen:

Satz:

Ist $\mathcal{K}$ Funktionenraum in $\mathcal{L}$, der die Konstanten enthält, dann gilt:

Konvergiert jedes Netz positiver linearer Operatoren von $\mathcal{L}$ in

$\mathcal{A}(\mathcal{L})$, das auf $\mathcal{K}$ gegen die Identität konvergiert, auch auf $\mathcal{L}$

gegen die Identität, dann ist $\overline{\partial_{\mathcal{L}} X} \subset \partial_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}} X$.

Beweis:

Sei $x \in \overline{\partial_{\mathcal{L}} X}$. Zu zeigen ist wieder (wie in Theorem II.13.):

$$\mu \in \mathcal{M}_X(\mathcal{K}), \quad \ell \in \mathcal{K} \implies \ell(x) = \int \ell d\mu.$$

Sei also $\mu \in \mathcal{M}_X(\mathcal{K})$, $g \in \mathcal{L}$ gegeben.

Wieder sei $\mathcal{W} = (V_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma}$ fundamentales Umgebungssystem von x in X ,

Γ durch Inklusion geordnet.

$\forall \gamma \in \Gamma$ sei $y_\gamma \in V_\gamma \cap \partial X$.

Setzen wir nun mit $\tilde{R}_\gamma := \psi^{-1} \circ R_\gamma \circ \phi$

$$T_\gamma : \begin{cases} \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{X}) \\ g \longrightarrow g + \tilde{R}_{V_\gamma} (\mu(g) - g) \end{cases}$$

für alle $\gamma \in \Gamma$.

Dann ist T_γ linear, positiv ($g \geq 0 \implies T_\gamma g = \mu(g) \cdot \tilde{R}_{V_\gamma}(1) + \phi(g) - \tilde{R}_{V_\gamma}(\phi(g)) \geq 0$).

Sei nun $h \in \mathcal{X}$, $\varepsilon > 0$.

Dann existiert ein $\gamma_0 \in \Gamma$ mit : $|\mu(h) - h(y)| < \varepsilon \quad \forall \gamma \geq \gamma_0$,

$\forall y \in V_\gamma$, also $-\varepsilon \leq \phi(\mu(h) - h) \cdot a_\gamma \leq \varepsilon$ auf exK $\forall \gamma \geq \gamma_0$.

Wegen $\psi(T_\gamma h - h) = R_{V_\gamma}(\psi(\mu(h) - h)) = \phi(\mu(h) - h) \cdot a_\gamma$

auf exK $\forall \gamma \geq \gamma_0$ ist dann $-\varepsilon \leq T_\gamma h - h \leq \varepsilon \quad \forall \gamma \geq \gamma_0$, also

$\lim_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma h = h$.

Somit ist auch $\lim_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma g = g$.

Wegen $T_\gamma g(y_\gamma) = \mu(g) \quad \forall \gamma \in \Gamma$ und $x = \lim_{\gamma \in \Gamma} y_\gamma$ folgt: $\mu(g) = g(x)$.

Literaturverzeichnis

- ALFSEN E.M., Compact convex sets and boundary integrals,
Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1971
- BAUER H. [1], Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der
Maßtheorie, de Gruyter, Berlin 1968
- BAUER H. [2], Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem,
Ann. Inst. Fourier, 11, 1961, 89 - 136
- BAUER H. [3], Theorems of Korovkin type for adapted spaces,
Ann. Inst. Fourier, 23, Fasc. 4, 1973, 245 - 260
- BAUER H. [4], Convergence of monotone operators,
Math. Zeitschrift, 136, 1974, 315 - 330
- BLIEDTNER J. - HANSEN W., Simplicial Cones in Potential
Theory, Inventiones Math. 29, 1975, 83 - 110
- CHOQUET G. [1], Lectures on Analysis I, II, Benjamin, New
York - Amsterdam 1969
- CHOQUET G. [2], Mesures coniques maximales, Seminaire Théorie
du Potentiel, Paris, t. 6, n° 12, 1962
- DONNER K. [1], Korovkin theorems for positive linear operators,
Journ. Approx. Theory, 13,4, 1975, 443 - 450
- DONNER K. [2], Korovkin theorems and P-essential sets I, II,
to appear
- FRANCHETTI G., Convergenza di operatori in sottospazi dello
spazio $C(Q)$, Boll. d. Unione Matem. Ital., Ser. IV,
3, 1970, 668 - 675

- GOULLET DE RUGY A. [1], Géométrie des simplexes, Centre de Documentation Universitaire, Paris 1968
- GOULLET DE RUGY A. [2], Faces complémentables dans un cône, Seminaire Choquet, 10e année, 1970/71, n° 2
- GROSSMAN M.W., Korovkin theorems for adapted spaces with respect to a positive operator, Mathem. Annalen 220, 1976, 253 - 262.
- HESS H.U., Isomorphie- und Approximationsprobleme in $A(K)$, Dissertation Erlangen, 1976
- JAMESON G., Ordered linear spaces, Lecture Notes in Math., 141, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1970
- ROBERTSON A.P. - ROBERTSON W.J., Topologische Vektorräume, BI-Hochschultaschenbücher 164/164a, 1967
- RUDIN W., Functional Analysis, McGraw-Hill Book Company, 1973
- RUDIN W. - STOUT E.L., Boundary properties of functions of several complex variables, Journ. of Appl. Math. and Mech., 7, 1965
- ŠAŠKIN Yu.A. [1], The Milman Choquet boundary and approximation theory, Funct. Anal. Appl., 1, 1967, 170 - 171
- ŠAŠKIN Yu.A. [2], Abstrakte harmonische Funktionen und das Problem der Operatorenkonvergenz; Mathematica 15 (38), 1973, 143 - 148 (russisch)
- SCHAEFER H.H. [1], Topological Vector Spaces, Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1971

- SCHAEFER H.H. [2], Banach Lattices and Positive Operators,
Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1974
- SIBONY D., Cônes de fonctions et potentiels, Lecture Notes,
Mc. Gill - University, Montreal, 1968
- USTINOV G.M., Gewisse Eigenschaften von Teilräumen von Räumen
affiner Funktionen, Mat. Zametki, 17, 1975, 307 - 318)
(russisch)
- WULBERT D.E., Convergence of operators and Korovkin's theorem,
Journ. of Appr. Theory, 1, 1968, 381 - 390

Lebenslauf

Name: Gottlieb Leha

Geboren am 15.8.1943 in Bondorf, Kreis Nürnberger Land

Eltern: Landwirtseheleute Peter und Kunigunde Leha, Bondorf

Schulbildung: Von 1949 bis 1954 fünf Jahre Volksschule in Osternohe;
danach neun Jahre Besuch des altsprachlichen Humanistischen Neuen
Gymnasiums in Nürnberg; dort im Juli 1963 Abitur

Wehrdienst: Zwei Jahre von 1963 bis 1965; Entlassung als Leutnant
der Reserve

Studium: Ab dem Wintersemester 1965/66 in Erlangen Mathematik und
Physik mit einem Stipendium für besonders Begabte von der
Bayerischen Staatsregierung; im Mai 1971 Diplomprüfung für
Mathematik; danach Doktorand bei Prof. Dr. H. Bauer, dabei
während acht Monaten Stipendium nach dem Graduiertenförderungs-
gesetz.

Tätigkeiten an der Universität: Seit Mai 1968 Studentische Hilfskraft,
ab August 1971 Wissenschaftliche Hilfskraft, schließlich ab
November 1972 Verwalter der Dienstgeschäfte eines Wissenschaft-
lichen Assistenten, jeweils am Mathematischen Institut Erlangen.

Akademische Lehrer: Die Professoren H. Bauer, D. Kölzow, K. Jacobs,
W. Specht.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hög, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990